เอกสารประกอบการสอน

การวิจัยดำเนินงาน 1
(Operations Research I)
206321

เขียนโดย: ผศ.ดร. รุ่งรัตน์ ภิสัชเพ็ญ

ภาควิชา วิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทที่ 1: บทนำ
(Introduction)

Author by: Dr. Roongrat Pisuchpen
Kasetsart University

การวิจัยดำเนินงาน

(Operations Research)

การวิจัยดำเนินงาน เป็นการสร้างตัวแบบแทนระบบปัญหาและนำมาวิเคราะห์เพื่อศึกษารูปแบบของปัญหา เพื่อใช้ในการพิจารณาแนวทางแก้ไขปัญหาเพื่อให้เกิดผลเสียน้อยที่สุด หรือได้แนวทางปฏิบัติเพื่อให้ได้ผลดีที่สุด โดยการวิจัยดำเนินงานจะมีหลักเกณฑ์ในการจัดตั้งปัญหาโดยการจัดเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นตัวเลขโดยคำนึงว่าการทำงานนั้นต้องอยู่ภายใต้อำนาจการควบคุม

การสร้างตัวแบบแทนระบบปัญหา

โดยตัวแบบในที่นี้อาจหมายถึงตัวแบบทางกายภาพ, ตัวแบบจำลอง (Simulation) และตัวแบบทางคณิตศาสตร์ โดยในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (Math Model)

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ คือ การตั้งรูปแบบในเชิงสมการหรืออสมการแทนระบบของปัญหา โดยจะมีการตั้งค่าตัวแปรขึ้นมาซึ่งเป็นเชิงปริมาณเพื่อสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ และสามารถคำนวณค่าคำตอบของตัวแปรได้ โดยตัวแปรในที่นี้คือ ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variable) เพื่อให้ได้คำตอบไปใช้ในการวางแผนและประกอบการตัดสินใจของผู้บริหารต่อไป ดังนั้นจึงมีการสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบ โดยขั้นตอนการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ แทนระบบของปัญหา (Model Formulation)

ปัญหาต่างๆที่พบในองค์กรหรือโรงงาน

การจัดตั้งปัญหา คือ การเข้าใจปัญหาอย่างชัดเจน และทราบถึงเงื่อนไขเพื่อที่จะกำหนดขอบเขตของปัญหานั่นได้ โดยปัญหาในที่นี้อาจหมายถึง

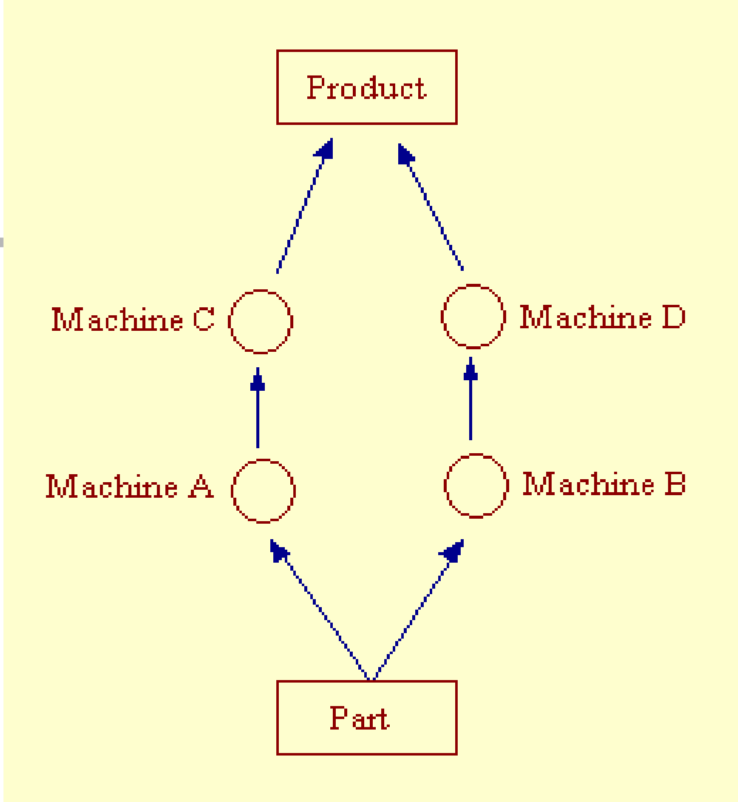
- ปัญหาเงินลงทุนที่มีอยู่อย่างจำกัด
- ปัญหาเกี่ยวกับการจัดกำลังคน
- ปัญหาเกี่ยวข้องกับวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิต
- ปัญหาชนิดของเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพในการผลิตต่างกัน

Industrial Application of LP Model

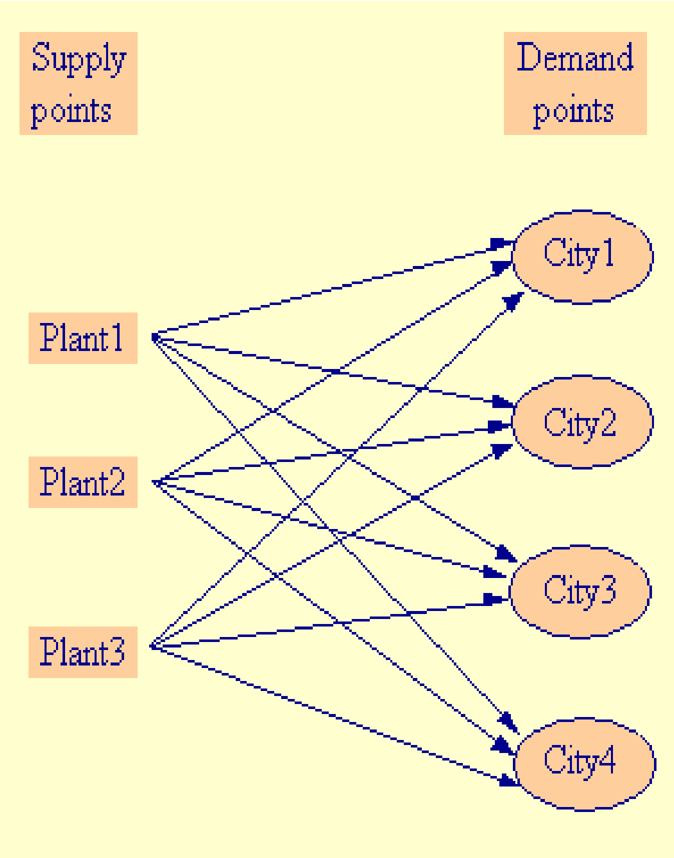
Production Planning

Plant	Production Time per Batch, Hours — Product 1	Product 2	Production Time Available per Week, Hours
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Profit per batch	$3000	$5000	

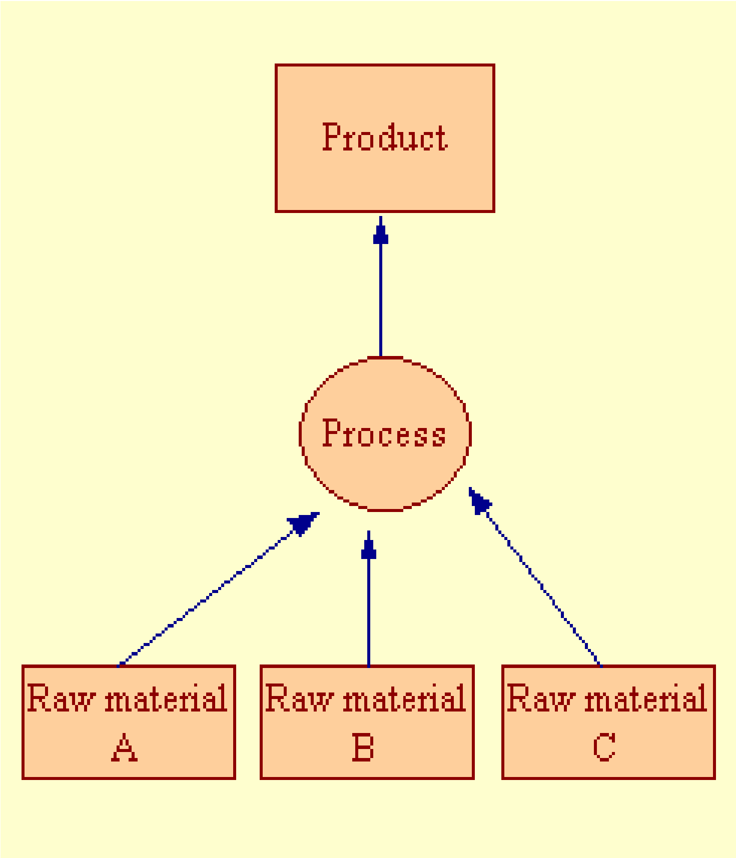
Production Scheduling



Distribution



Blending Problem



ขั้นตอนของการวิจัยการดำเนินงาน

1. การจัดตั้งปัญหา
2. สร้าง Math Model แทนระบบของปัญหา : Model Formulation
3. การหาผลลัพธ์ของปัญหา : Model Solution โดยวิธี Graphical Method, Simplex Method, Spread Sheet Method, ฯลฯ
4. ทดสอบผลลัพธ์และตั้งขอบข่ายของผลลัพธ์ (Sensitivity Analysis)
5. การนำผลลัพธ์ไปใช้งาน

บทที่ 2: กำหนดการเชิงเส้น
(Linear Modeling)

Author by: Dr. Roongrat Pisuchpen
Kasetsart University

Introduction to LP Model

Examples of linear : 1) $x_1 + 4x_2 + 2x_3$ 2) $x + y$

Examples of non-linear : 1) x^3 2) e^x 3) $x_1 x_2$

องค์ประกอบของ Model Formulation

- สมการกำหนดเป้าหมาย (Objective Function) : เพื่อกำหนดเป้าหมาย maximize or minimize
- สมการแสดงขอบข่าย (Constraint) : แสดงความจำกัดของปัจจัย ซึ่งอยู่ในรูปสมการ หรือ อสมการ
- All Positive Value โดยตัวแปรตัดสินใจทุกตัวจะต้องมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก

$$\max/\min Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

subjected to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \ge b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0$$

ขั้นตอนของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

- **กำหนดตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variable)** ของปัญหาก่อน ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงปริมาณ แล้วสมมุติเป็นสัญลักษณ์ทางพีชคณิต เช่น รูป X_j โดย $j = 1,2,\ldots n$ เป็นต้น ที่สามารถชี้บ่งบอกถึงคำตอบของตัวปัญหา ตัวแปรเหล่านี้จะต้องมีค่าจำนวนจริงบวก
- **กำหนดเป้าหมายของตัวปัญหา (Objective Function)** : เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัดสินใจ เป้าหมายของตัวปัญหานี้ จะต้องเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัดสินใจ และมีค่าเป็นเลขจริงและเราจะต้องกำหนดว่าค่าของฟังก์ชันนี้เราต้องการให้มีค่ามาก (Maximize) หรือมีค่าน้อย (Minimize)
- **สร้างข้อจำกัดของตัวปัญหา (Constraint)** : เราสามารถจะนำเอาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัดสินใจกับทรัพยากรที่มีอยู่เป็นจำนวนจำกัดนี้ มาเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์กันทางคณิตศาสตร์โดยจะอยู่ในรูปของสมการ หรือ อสมการได้
- **สร้างตัวแปรทุกตัวให้ค่าเท่ากับหรือมากกว่าศูนย์ (All Positive Value)** โดยตัวแปรตัดสินใจทุกตัวจะต้องมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก หมายความว่า $Xj \geq 0, j = 1,2,\ldots n$ เป็นข้อจำกัดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงว่า คำตอบที่ได้มานั้นค่าตัวแปรจะเป็นลบไม่ได้ (อยู่ใน Quadrant ที่ 1 เท่านั้น)

ตัวอย่างการโปรแกรมเชิงเส้น (LP Model)

โรงงานแห่งหนึ่งกำลังพิจารณาการใช้ทรัพยากรต่าง ๆ ที่มีอยู่ เพื่อผลิตสินค้าโดยมีเป้าหมายเพื่อให้ได้รับกำไรสูงสุด สมมติว่ามีทรัพยากรต่าง ๆ ที่ใช้ในการผลิตอยู่ m ชนิด สินค้าที่ต้องการผลิตมีอยู่ n อย่าง

- X_j = ตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนสินค้าชนิดที่ j , j = 1..n
- Z = กำไรทั้งหมด
- C_j = ส.ป.ส ของObjective function ซึ่งเป็นกำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ j , j = 1..n
- $a_{i\,j}$ = ส.ป.ส ของข้อจำกัดเป็นจำนวนทรัพยากร i ที่ถูกใช้ในการผลิตสินค้าชนิดที่ j หนึ่งหน่วย, $[a_{i\,j}]_{nxm}$
- b_i = จำนวนทรัพยากร i ที่มีอยู่

ตัวอย่างการโปรแกรมเชิงเส้น

(LP Model)

ทรัพยากร	จำนวนทรัพยากรที่ใช้ในการผลิตสินค้าต่อหน่วย				จำนวนทรัพยากรที่มีอยู่
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$			...		$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
กำไรต่อหน่วย	c_1	c_2	...	c_n	
จำนวนสินค้า	x_1	x_2	...	x_n	

$$\max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$S.T.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \forall_i = 1,2,\dots m$$

$$x_j \ge 0, \forall_j = 1,2,\dots n$$

Ex 1: มีจักรเย็บผ้าใช้ในการผลิตเสื้อและกางเกง โดยเสื้อขายตัวละ 100 บาท กางเกงตัวละ 200 บาท โดยจักรสามารถผลิตกางเกง 3 ชม./ตัว เสื้อ 1 ชม./ตัว โดยมีชั่วโมงทำงาน 8 ชม. ถ้ามีผ้าอยู่ 2,000 ตร.ม ถ้าผลิตเสื้อต้องใช้ผ้า 125 ตร.ม กางเกง 75 ตร.ม จงสร้าง Model Formulation เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

ตัวแปรตัดสินใจ :

DV=> X_1 = จ.น. เสื้อ, X_2 = จ.น. กางเกง

$$\text{Max } Z = 100X_1 + 200X_2$$

S.T. $X_1 + 3X_2 \leq 8$ (เวลา)

$125X_1 + 75X_2 \leq 2{,}000$ (ผ้า)

$X_1, X_2 \geq 0$

Ex 2: โรงงานผลิตเครื่องมือหนักแห่งหนึ่งมีสายการผลิต 2สาย สายแรกผลิตเครื่องตักดิน (E) สายที่ 2 ผลิตเครื่องตัดไม้ (F)

1. โรงงานได้กำไร 5,000 บาท ต่อการผลิต E แต่ละหน่วย

4,000 บาท ต่อการผลิต F แต่ละหน่วย

2. การผลิตเครื่องมือแต่ละชนิดต้องใช้ m/c A และ B

3. ในการผลิตเดือนหน้า m/c A&B มีชั่วโมงทำงานเป็น 150 & 160 ชม. และโรงงานจะต้องผลิตเครื่องมือ E&F รวมกันไม่น้อยกว่า 5 เครื่อง

ข้อมูลการผลิต	ชม. การใช้งานต่อหน่วย		ชม. ทำงาน
m/c	E	F	
A	10	15	150
B	20	10	160

4. การทดสอบเครื่องมือ E&F ที่ผลิตได้ต้องใช้แรงงานคนไม่น้อยกว่า 135 ชม.

ข้อมูลการผลิต	ชม. การใช้ต่อหน่วย		ชม. ที่ใช้
	E	F	
ชม. ที่ใช้ในการทดสอบต่อหน่วย	30	10	135

อยากทราบว่าจะผลิตสินค้าสองชนิดอย่างไรเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด จงสร้าง Model Formulation

ตัวแปรตัดสินใจ :

DV=> E = จ.น. เครื่งตักดิน, F = จ.น. เครื่องตัดไม้

Max Z = 5000E+4000F

S.T. $10E + 15F \leq 150$ (เวลา m/c A)

$20E + 10F \leq 160$ (เวลา m/c B)

$E + F \geq 5$ (สมรรถภาพ)

$30E + 10F \geq 135$ (เวลาทดสอบ)

$E, F \geq 0$

เพิ่มเติม:

ถ้าต้องผลิต E 1 เครื่อง จะต้องผลิต F อย่างน้อย 2 เครื่อง (S.T. $F \geq 2E$)

Ex 3: บริษัทสยามอาหารสัตว์ ผลิตอาหารสัตว์จำหน่ายโดยใช้วัตถุดิบสามชนิด วัตถุดิบแต่ละชนิดมีปริมาณสารอาหารแตกต่างกัน ดังแสดงในตาราง สมมติว่าอาหารสัตว์ 100 ปอนด์ต้องประกอบด้วยสารอาหารต่าง ๆ ดังนี้ สารอาหาร A อย่างน้อย 0.8% แต่ไม่สูงกว่า 1.2% สารอาหาร B ไม่น้อยกว่า 22% สารอาหาร C มากสุดไม่เกิน 5% อยากทราบว่า ควรผสมวัตถุดิบทั้งสามอย่างไรจึงจะได้สารอาหารตามที่กำหนด และเสียต้นทุนต่ำสุด

วัตถุดิบ	สารอาหาร (ปอนด์/ปอนด์)			ราคา/ปอนด์
	A	B	C	
ชนิดที่ 1	0.380	-	0.015	30
ชนิดที่ 2	0.150	0.900	0.010	15
ชนิดที่ 3	-	0.250	0.020	10

จงสร้าง *Model Formulation*

ให้ Z คือ ต้นทุนทั้งหมด

ตัวแปรตัดสินใจ : X_i = ปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ i

Min $Z = 30X_1 + 15X_2 + 10X_3$

S.T. $X_1+X_2+X_3 = 100$ (ข้อจำกัดด้านอาหารสัตว์ 100 ปอนด์)

$0.38X_1+0.15X_2 \geq 0.008(X_1+X_2+X_3)$ (ข้อจำกัดด้านสารอาหารA)

$0.38X_1+0.15X_2 \leq 0.012(X_1+X_2+X_3)$ (ข้อจำกัดด้านสารอาหารA)

$0.9X_2+0.25X_3 \geq 0.22(X_1+X_2+X_3)$ (ข้อจำกัดด้านสารอาหารB)

$0.015X_1+0.010X_2 + 0.02X_3 \leq 0.05(X_1+X_2+X_3)$

(ข้อจำกัดด้านสารอาหารC)

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Ex 4: บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงานผลิตสินค้าอยู่สามแห่ง มีกำลังการผลิต 180, 50 และ 40 ตันต่อเดือน ตามลำดับ ถ้าบริษัทมีตัวแทนจำหน่าย 4 แห่ง ซึ่งมีความสามารถในการจำหน่าย 100, 40, 50 และ 50 ตันต่อเดือน ตามลำดับ ค่าใช้จ่ายในการขนสินค้าจากโรงงานไปยังตัวแทนจำหน่ายแสดงในตาราง อยากทราบว่าบริษัทควรจัดส่งสินค้าอย่างไรจึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด จงสร้าง Model Formulation

ตัวแทน / โรงงาน	ค่าใช้จ่าย (บาท/ตัน)				กำลังการผลิต
	1	2	3	4	
1	5,000	6,500	4,000	7,000	180
2	4,200	3,900	5,500	4,000	50
3	3,500	4,000	3,500	3,500	40
การจำหน่าย	100	40	50	50	

Model Formulation

ตัวแปรตัดสินใจ :

X_{ij} = ปริมาณสินค้าจากโรงงาน i ไปยังตัวแทนจำหน่าย j ; i=1,2,..,m ; j=1,2,..,n

ให้ Z เป็นค่าใช้จ่ายในการขนส่ง

C_{ij} = ค่าขนส่งต่อหนึ่งหน่วยจากแหล่ง i ไปยังตัวแทนจำหน่าย j

$$MinZ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$S.T.$

$$\text{(supply)} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \forall_i = 1,2,..,m$$

$$\text{(demand)} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \forall_j = 1,2,..,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall_{ij}$$

Ex 5: ผู้ผลิตสินค้ารายหนึ่ง ผลิตสินค้า 3 ชนิด คือชนิดที่ 1,2 และ 3 โดยใช้วัตถุดิบ 2 ชนิด คือ A 2,000 หน่วย และวัตถุดิบ B 3,000 หน่วย สินค้าแต่ละชนิดต่อ 1 หน่วยใช้วัตถุดิบดังตาราง

สินค้า / วัตถุดิบ	1	2	3
A	2	3	5
B	4	2	4

เวลาที่ใช้ในการผลิตแต่ละหน่วยของสินค้าชนิดที่ 1 เป็น 2 เท่าของสินค้าชนิดที่ 2 และเป็น 3 เท่าของสินค้าชนิดที่ 3 เวลาที่ใช้ในการผลิตทั้งหมดถ้าผลิตสินค้าชนิดที่ 1 เพียงอย่างเดียวจะผลิตได้ 700 ชิ้น ในการสำรวจตลาดพบว่าความต้องการอย่างน้อยที่สุดของสินค้าชนิด 1, 2 และ 3 เป็น 200, 200 และ 150 ชิ้น ตามลำดับ และอัตราส่วนของจำนวนสินค้าชนิด 1, 2 และ 3 ที่ผลิตต้องเท่ากับ 3:2:5
ถ้ากำไรต่อชิ้นของสินค้าชนิด 1, 2 และ 3 เป็น 600, 400 และ 1,000 บาท ตามลำดับ จงสร้างรูปแบบปัญหาเพื่อหาจำนวนชิ้นของสินค้าแต่ละชนิดที่จะผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

Ex 6: โรงงานทำขนมปังแห่งหนึ่งได้มีการตัดสินใจที่จะจัดหีบห่อขนมปัง 4 แบบ แบบ A, B, C, D แต่ละแบบจะประกอบด้วยขนมปัง 3 ชนิด คือ ขนมปังครีมรสส้ม (O.C) ขนมปังครีมรสชอคโกแลต (C.C) และขนมปังเวเฟอร์ (W) ในปริมาณต่าง ๆ กัน ดังตารางปริมาณของขนมปังแต่ละชนิดที่ผลิตได้ต่อวันและต้นทุนการผลิตดังตารางข้างล่าง

หีบห่อ	ส่วนประกอบ	ราคาขายต่อ ก.ก. (บาท)
A	O.C อย่างน้อย 40% C.C น้อยกว่า 20% W ไม่จำกัด	20
B	O.C อย่างน้อย 20% C.C อย่างมาก 40% W ไม่จำกัด	25
C	O.C มากกว่า 50% C.C น้อยกว่า 10% W ไม่จำกัด	22
D	ไม่จำกัด	12

แสดงปริมาณขนมปังแต่ละชนิดที่ผลิตต่อวันและต้นทุนการผลิตต่อกิโลกรัมของขนมปังแต่ละชนิด

ขนมปัง	จำนวนที่ผลิตต่อวัน (กิโลกรัม)	ต้นทุนการผลิตต่อกิโลกรัม (บาท)
O.C.	200	8
C.C.	200	9
W	150	7

จงหารูปแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหา (Model Formulation) นี้ว่าควรจะจัดขนมปังในแต่ละหีบห่ออย่างไร กำไรสูงสุด โดยที่ในด้านการตลาดไม่มีข้อจำกัดใด ๆ ทั้งสิ้น

ให้ Z คือ กำไรทั้งหมด

DV=> X_{ij} = หีบห่อ i ที่บรรจุด้วยปริมาณขนมปังชนิด j;

i = หีบห่อ A, B,C ตามลำดับ;

j = ปริมาณO.C., C.C, W ตามลำดับ

ตัวแปรตัดสินใจ : X_{ij} = หีบห่อ i ที่บรรจุด้วยปริมาณขนมปังชนิด j;

i = หีบห่อ A, B, C ตามลำดับ; j = 1,2,3 ปริมาณ O.C., C.C., W ตามลำดับ

น้ำหนักของขนมปังในหีบห่อแบบ A = $(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3})$

โดย X_{A1} คือ ปริมาณ OC ในหีบห่อ A

X_{A2} คือ ปริมาณ C.C ในหีบห่อ A

X_{A3} คือ ปริมาณ W ในหีบห่อ A

น้ำหนักของขนมปังในหีบห่อแบบ B = $(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3})$

โดย X_{B1} คือ ปริมาณ OC ในหีบห่อ B

X_{B2} คือ ปริมาณ C.C ในหีบห่อ B

X_{B3} คือ ปริมาณ W ในหีบห่อ B

น้ำหนักของขนมปังในหีบห่อแบบ C = $(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$

โดย X_{C1} คือ ปริมาณ OC ในหีบห่อ C

X_{C2} คือ ปริมาณ C.C ในหีบห่อ C

X_{C3} คือ ปริมาณ W ในหีบห่อ C

น้ำหนักของขนมปังในหีบห่อแบบ D = $(X_{D1} + X_{D2} + X_{D3})$

โดย X_{D1} คือ ปริมาณ OC ในหีบห่อ D

X_{D2} คือ ปริมาณ C.C ในหีบห่อ D

X_{D3} คือ ปริมาณ W ในหีบห่อ D

ดังนั้น ปริมาณขนมปังขนมปัง O.C. = $(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1})$

ปริมาณขนมปังขนมปัง C.C. = $(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2})$

ปริมาณขนมปังขนมปัง W = $(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3})$

Ex 7: บริษัทน้ำมันแห่งหนึ่ง สั่งซื้อน้ำมันดิบ 3 อย่าง คือ A, B และ C คุณภาพ และราคาของน้ำมันดิบแต่ละชนิดแสดงในตารางข้างล่าง บริษัทสามารถซื้อน้ำมันดิบแต่ละชนิดได้ไม่เกินวันละ 5,000 บาเรล บริษัทนำน้ำมันดิบทั้ง 3 ชนิดนี้มาผสมเพื่อกลั่นเป็นน้ำมันโซล่า 3 ชนิด คือ G1, G2 และ G3 ราคาขายน้ำมันโซล่าแตละชนิด และปริมาณความต้องการในแต่ละวันแสดงในตารางข้างล่าง น้ำมันโซล่าทั้ง 3 นี้แตกต่างกันในเรื่องปริมาณสารซัลฟัลดังนี้ น้ำมันโซล่า G1 ต้องมี ปริมาณสารซัลฟัลไม่เกิน 1 % น้ำมัโซล่า G2 ต้องมีปริมาณสารซัลฟัลไม่เกิน 2 % และน้ำมันโซล่า G3 ต้องมีปริมาณสารซัลฟัลไม่เกิน 1 % ในการกลั่นน้ำมันแต่ละบาเรลต้องเสียค่าใช้จ่าย 40 บาท ในแต่ละวันสามารถกลั่นน้ำมันโล่าทั้งหมดได้ไม่เกิน 14,000 บาเรล บริษัทควรผลิตน้ำมันโซล่าทั้ง 3 ชนิดนี้วันละเท่าใด จึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด

ตารางแสดงราคาและคุณภาพน้ำมันดิบ

ชนิดของน้ำมันดิบ	ปริมาณซัลฟัล (%)	ราคา
A	0.5	450
B	2.0	350
C	3.0	250

ตารางแสดงราคาและปริมาณความต้องการน้ำมันโซล่า

ชนิดของน้ำมันโซล่า	ราคา	ความต้องการ (บาเรล/วัน)
G1	700	3000
G2	600	2000
G3	500	1000

DV=> X_{ij} = ปริมาณบาเรลของน้ำมันดิบ i ในโซล่า j;

i = น้ำมันดิบ A, B, C ตามลำดับ;

j = โซล่า G1, G2, G3 ตามลำดับ

ให้ Z คือ กำไรทั้งหมด

ตัวแปรตัดสินใจ : X_{ij} = ปริมาณบาร์เรลของน้ำมันดิบ i ในโซล่า j;

i = 1,2,3 น้ำมันดิบ A, B, C ตามลำดับ; j = 1,2,3 โซล่า G1, G2, G3

ดังนั้น $(X_{11}+X_{12}+X_{13})$ = ปริมาณน้ำมันดิบชนิด A ที่ใช้ในแต่ละวัน

$(X_{21}+X_{22}+X_{23})$ = ปริมาณน้ำมันดิบชนิด B ที่ใช้ในแต่ละวัน

$(X_{31}+X_{32}+X_{33})$ = ปริมาณน้ำมันดิบชนิด C ที่ใช้ในแต่ละวัน

$(X_{11}+X_{21}+X_{31})$ = ปริมาณน้ำมันโซล่า G1 ที่ใช้ในแต่ละวัน

$(X_{12}+X_{22}+X_{32})$ = ปริมาณน้ำมันโซล่า G2 ที่ใช้ในแต่ละวัน

$(X_{13}+X_{23}+X_{33})$ = ปริมาณน้ำมันโซล่า G3 ที่ใช้ในแต่ละวัน

Max Z = กำไร = ยอดขายในแต่ละวัน – ต้นทุนน้ำมันดิบ – ค่าใช้จ่ายในการกลั่น

โดย ยอดขายในแต่ละวัน คือ $700(X_{11}+X_{21}+X_{31})+600(X_{12}+X_{22}+X_{32})+500(X_{13}+X_{23}+X_{33})$

$$\Rightarrow 700\sum_{i=1}^{3} X_{i1} + 600\sum_{i=1}^{3} X_{i2} + 500\sum_{i=1}^{3} X_{i3}$$

ต้นทุนน้ำมันดิบ คือ $450(X_{11}+X_{12}+X_{13})+350(X_{21}+X_{22}+X_{23})+250(X_{31}+X_{32}+X_{33})$

$$\Rightarrow 450\sum_{j=1}^{3} X_{1j} + 350\sum_{j=1}^{3} X_{2j} + 250\sum_{j=1}^{3} X_{3j}$$

ค่าใช้จ่ายในการกลั่น คือ $40(X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{31}+X_{32}+X_{33}) \Rightarrow 40\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

Ex 8: ตลาดมีความต้องการสินค้าของโรงงานแห่งหนึ่งจำนวน 5,000 ชิ้นในหนึ่งวัน โดยโรงงานแห่งนี้มีเครื่องจักร 4 เครื่อง ที่สามารถผลิตสินค้าชนิดนี้ โดยมีกำลังการผลิตและต้นทุนการผลิตในแต่ละเครื่องจักรแตกต่างกันดังตารางข้างล่างนี้ ถ้าเครื่องจักรนั้นถูกใช้จะมีค่าใช้จ่ายในการตั้งเครื่องจักร (Setup Cost) เกิดขึ้น

Machine	Setup Cost	Production cost/ unit after machine setup	Max. daily production
1	400	4	2000
2	1000	6	4000
3	600	2	1000
4	300	5	3000

จงสร้างรูปแบบของปัญหา (Model Formulation) เพื่อที่จะหาแผนในการผลิตต่อวันให้ได้ตามความต้องการของตลาดโดยเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด

Model Formulation of Integer Linear Programming

DV=> Xi = จำนวนชิ้นงานที่ผลิตบนเครื่องจักร i ; i=1, 2, 3, 4

DV=> Y_i = ตัวแปรตัดสินใจว่าเครื่องจักรนั้นถูกใช้งาน

หรือไม่ ถ้า $Y_i = 1$ เครื่องจักรนั้นถูกใช้งาน

Yi = 0 เครื่องจักรนั้นไม่ถูกใช้งาน

$X_i \geq 0$

$Y_1, Y_2 = 0$ or 1 (Binary number)

Model Formulation of Integer Linear Programming

เงื่อนไขเพิ่มเติม *ถ้าทำเครื่องจักรที่ 1 จะไม่ทำเครื่องจักรที่ 2*
ถ้าทำเครื่องจักรที่ 2 จะไม่ทำเครื่องจักรที่ 1

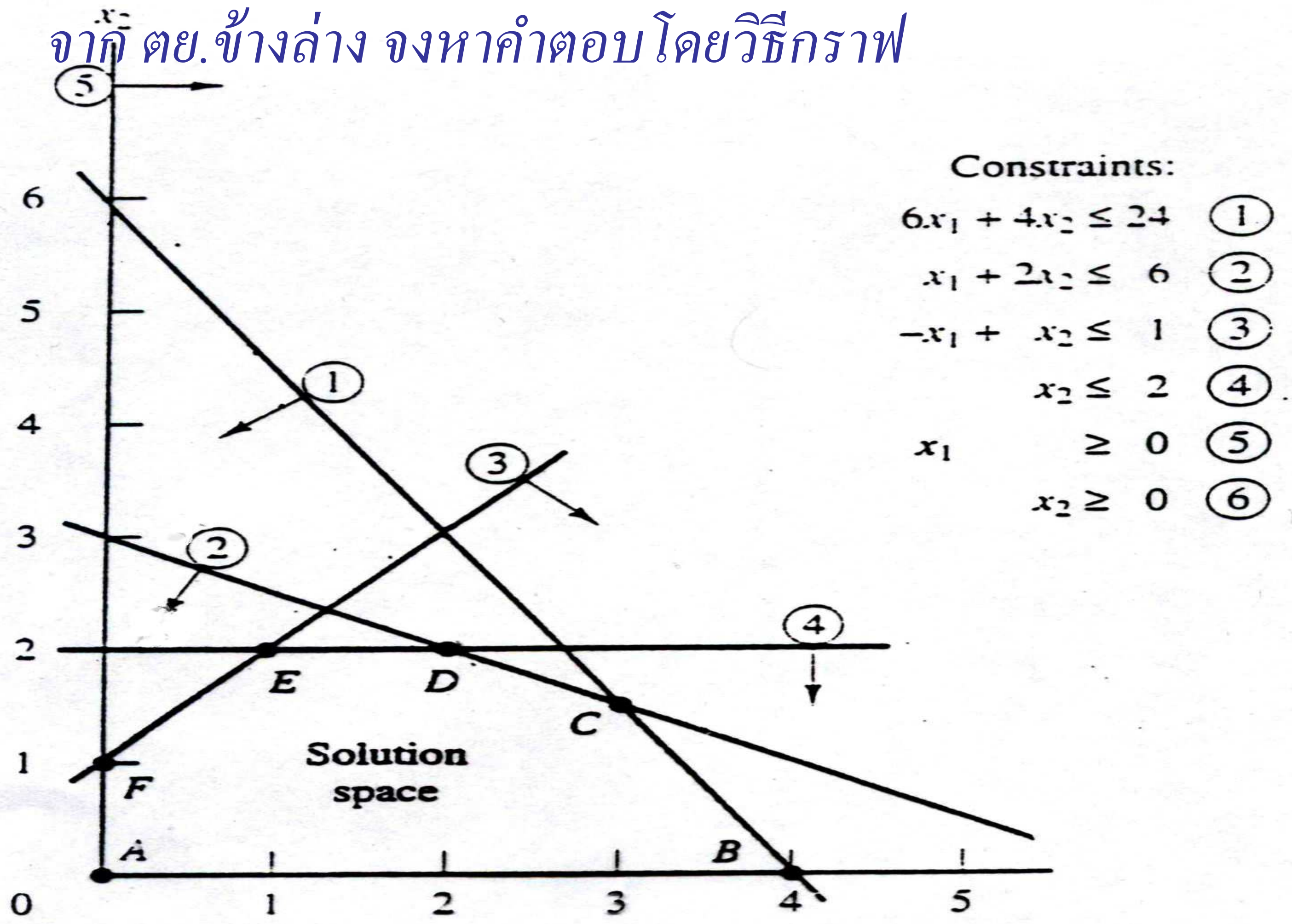
Note: Express the following constraint in term of Y_i

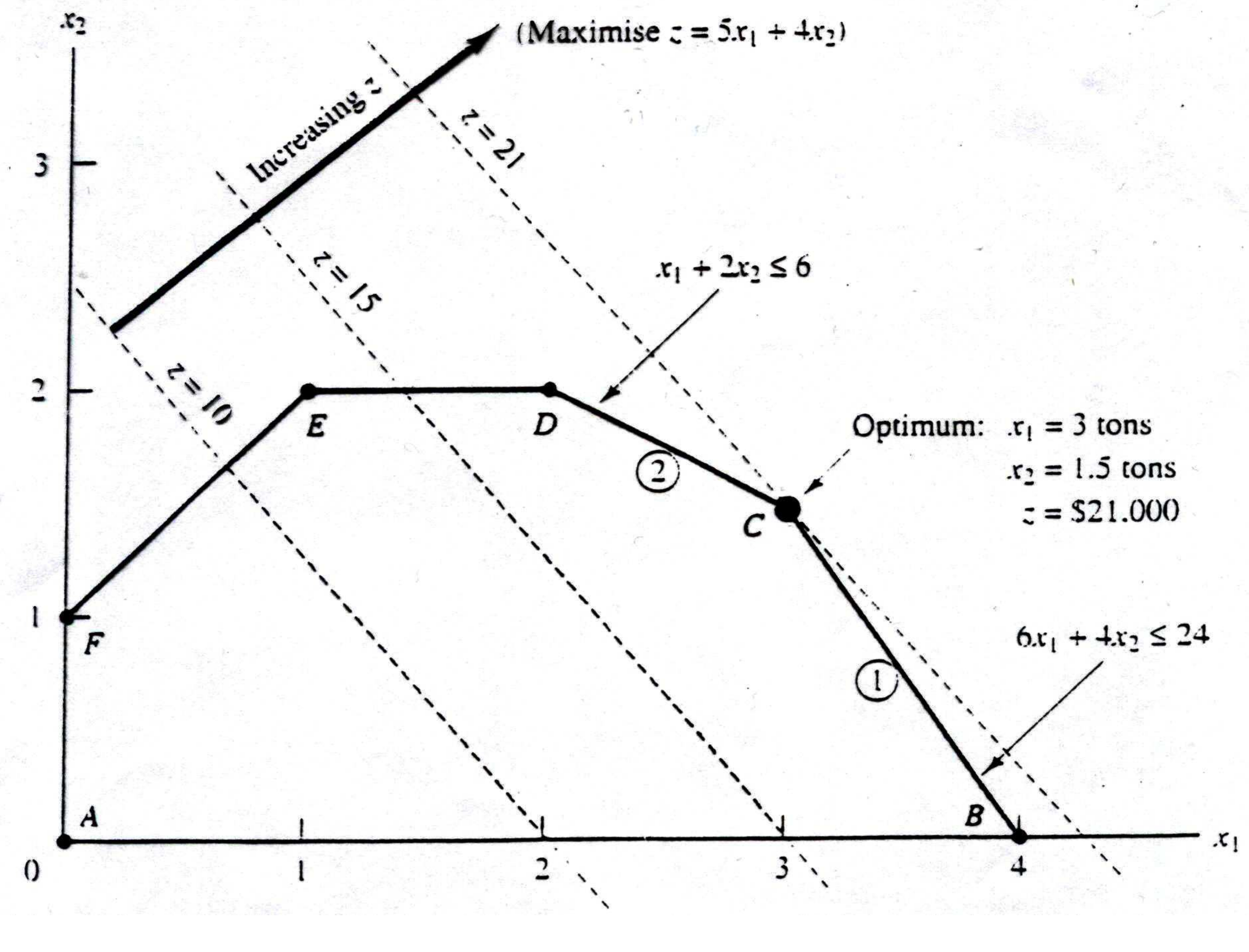
"If investment 1 is invested, investment 2 cannot be invested"

Define Y_i *= 1 if investment I is made*

= 0 otherwise

จากโจทย์ ตย.ข้างล่าง จงหาคำตอบ โดยวิธีกราฟ





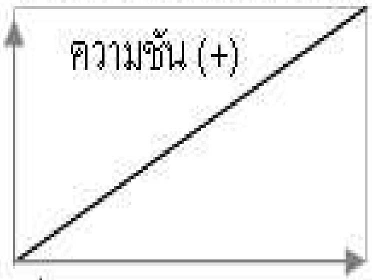
วิธีกราฟ (Graphical Method)

เป็นวิธีเบื้องต้นทำให้เห็นภาพชัดขึ้นเพราะคำตอบมองได้ง่ายจากรูป วิธีนี้ใช้หาคำตอบของแบบจำลอง LP ที่มีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัว

ขั้นตอน

1. เปลี่ยนอสมการเป็นสมการและเขียนสมการเส้นตรงลงไปในกราฟ
2. เลือกจุดทดลอง ให้เลือกจุดใดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่เขียนขึ้นในข้อ 1. (แนะนำให้เลือกจุดทดลองที่ (0, 0) ถ้าสมการเส้นตรงของเงื่อนไขนั้นไม่ผ่านจุด (0, 0))
   จากนั้น ตรวจสอบว่าจุดทดลองอยู่ในบริเวณขอบเขตหรือไม่
   - ถ้านำจุดทดลองไปแทนในอสมการเงื่อนไขแล้วเงื่อนไขเป็นจริง => แสดงว่าจุดทดลองอยู่ในบริเวณขอบเขต
   - ถ้านำจุดทดลองไปแทนในอสมการเงื่อนไขแล้วเงื่อนไขเป็นเท็จ => แสดงว่าจุดทดลองอยู่ตรงข้ามบริเวณขอบเขต
3. เมื่อได้เส้นขอบเขตของแต่ละสมการเงื่อนไขแล้ว พื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible Region) คือพื้นที่ที่ทับซ้อนกันของทุกขอบเขต (Intersection Area) ซึ่งหมายถึงพื้นที่ที่ได้บรรจุด้วยผลลัพธ์ที่ทำให้ทุกสมการเงื่อนไขเป็นจริง
4. ลากเส้นสมการเป้าหมาย (Objective Function) – โดยให้เขียนเส้นความชัน (Slope) ของสมการเป้าหมายผ่านพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible Region)

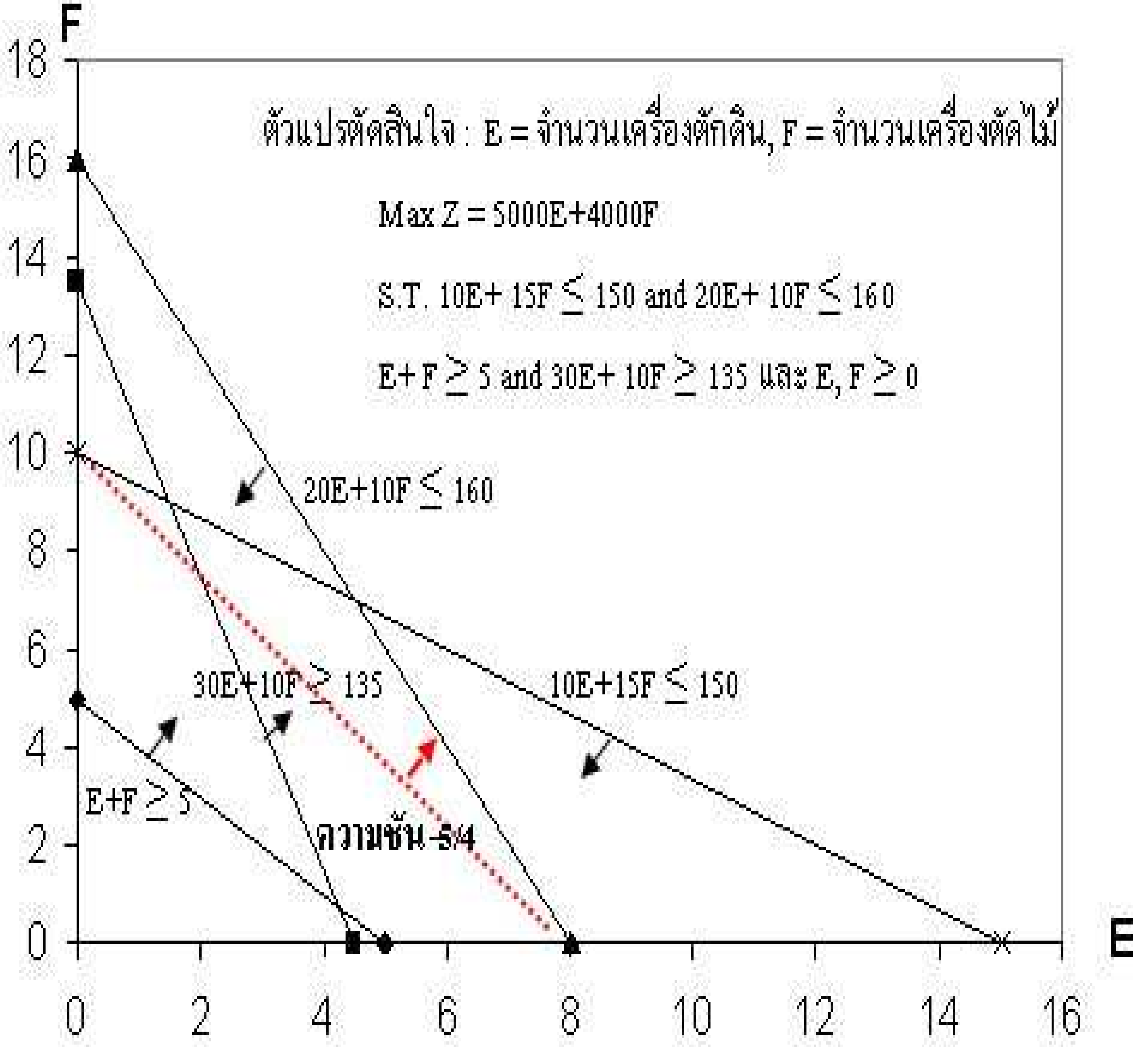
รูปความชันกรณีความชันเป็นบวก



รูปความชันกรณีความชันเป็นลบ

5. เลื่อนเส้นสมการเป้าหมาย (Objective Function) – โดยให้เลื่อนเส้นความชัน (Slope)ขึ้นหรือลงเพื่อให้สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันเป้าหมายนี้ (มีค่ามาก (Maximize) หรือมีค่าน้อย (Minimize)) จนพบคำตอบที่ดีที่สุด (Optimal Solution)

จาก ตย.2 จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ

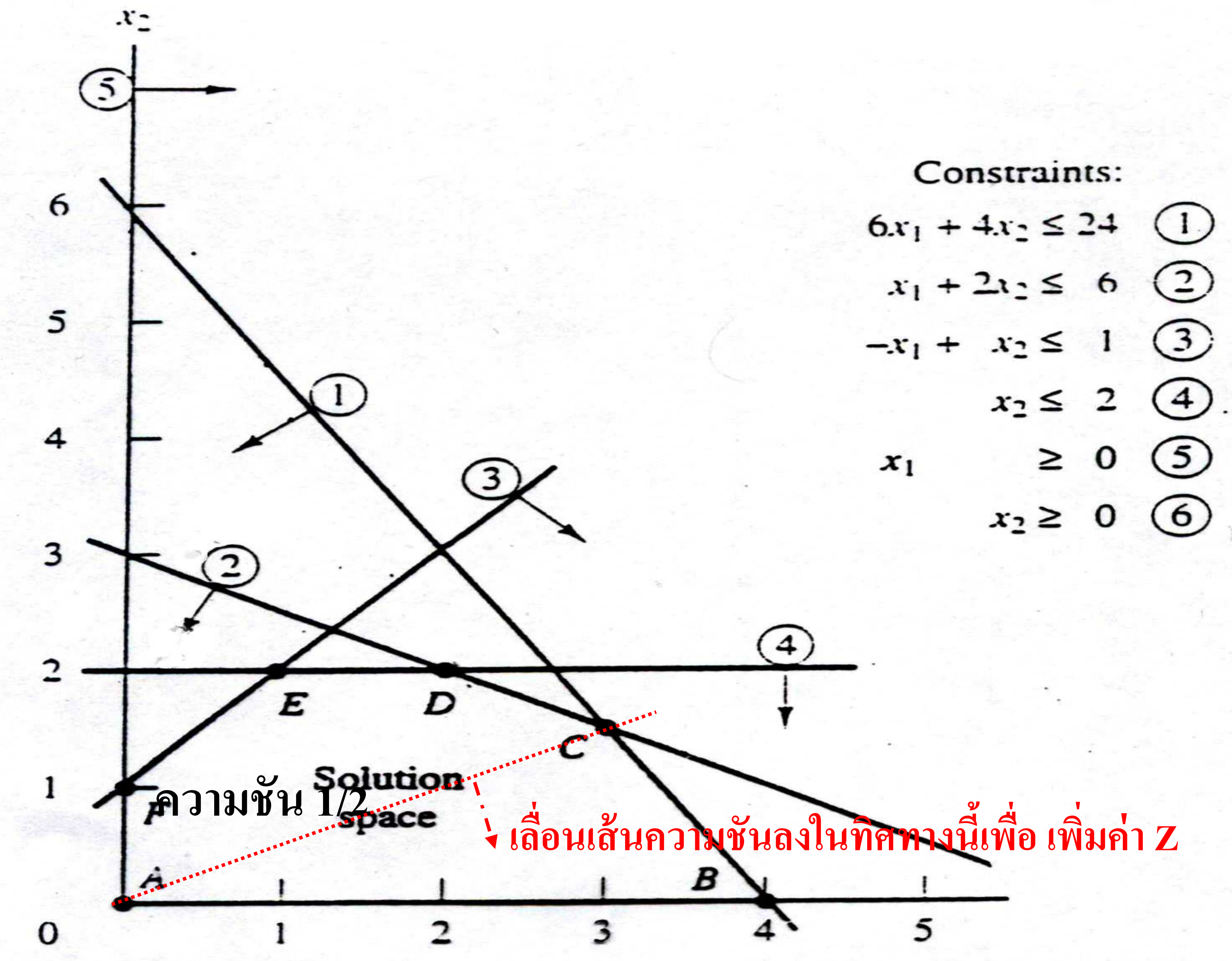


Slope of objective function = -5/4

Optimal Solution: F=7 E=4.5 โดย E,F ε R^+

ถ้าโจทย์บังคับให้คำตอบต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น E,F ε I เรียกโจทย์แบบนี้ว่า Integer Linear Programming (ILP)

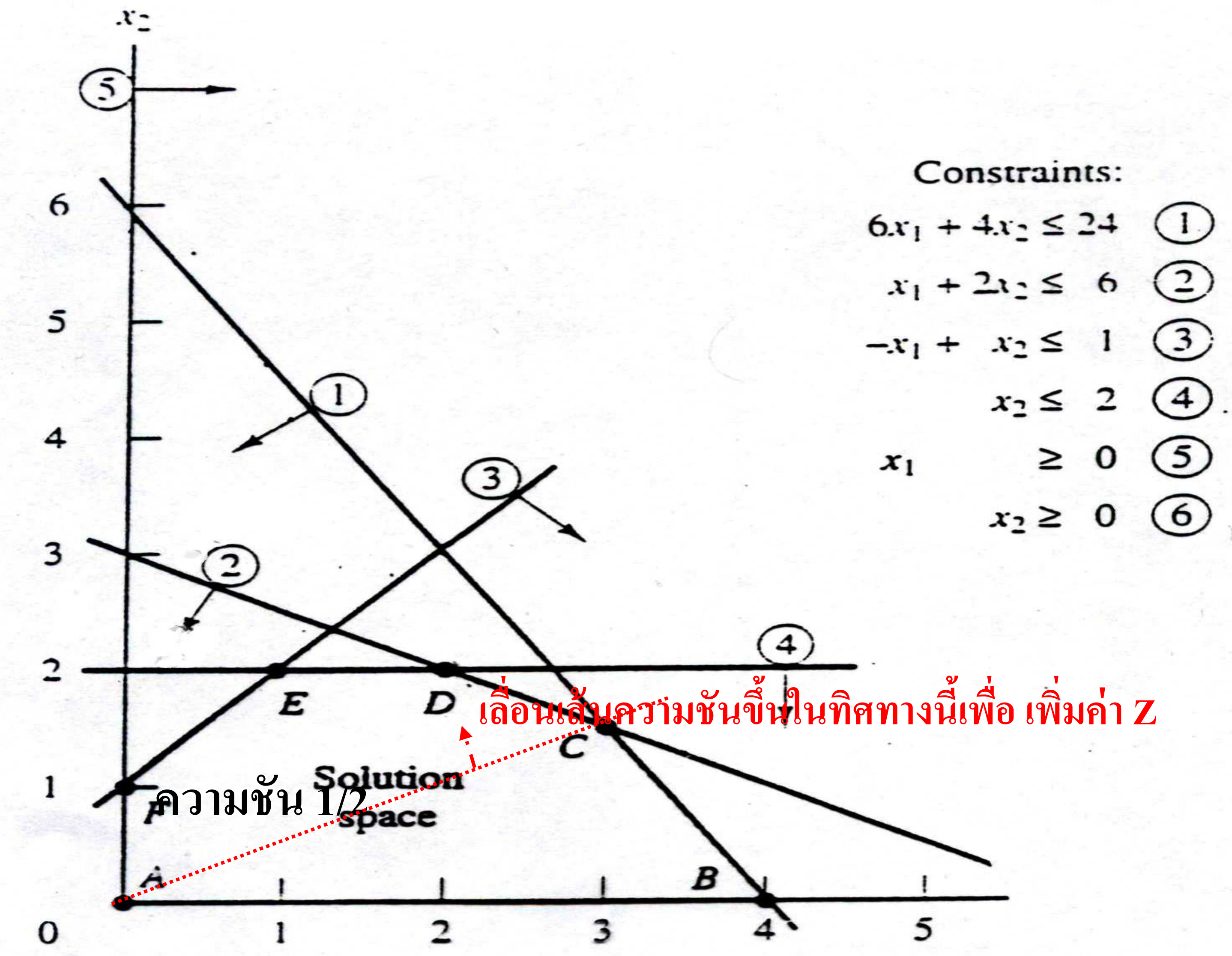
จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ **Max** $Z = X_1 - 2X_2$



ดังนั้น จุดสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งในที่นี้ คือ จุด ..... (....., ...) จะได้ Z = ...

ดังนั้นในกรณีตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่ามีผลลัพธ์ที่ดีที่สุดค่าเดียว จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Unique Optimal Solution** (มีคำตอบที่ดีที่สุดคำตอบเดียว)

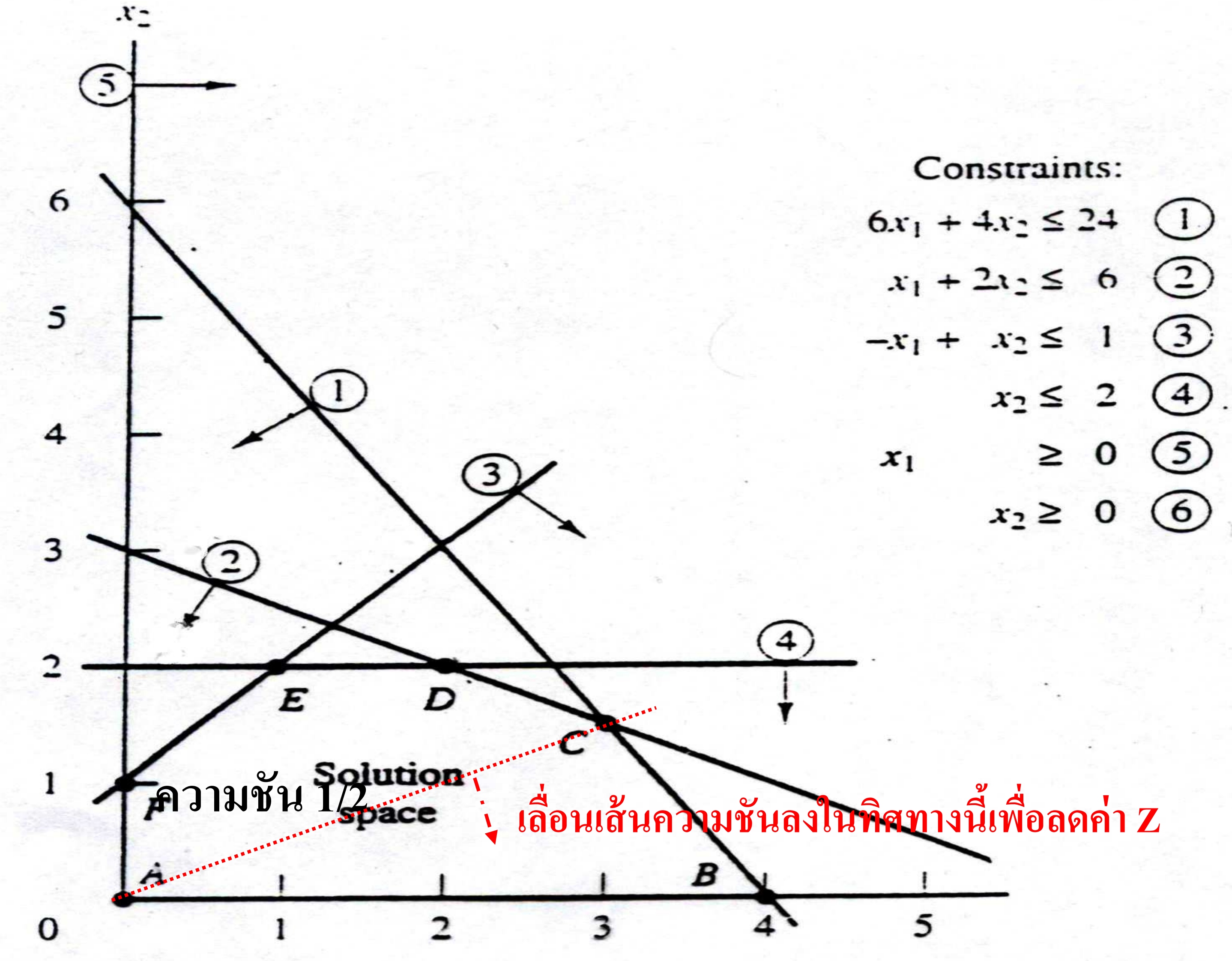
จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ **Max** $Z = -X_1 + 2X_2$



ดังนั้น จุดสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งในที่นี้ คือ จุด ..... (....., ...) จะได้ Z = ...

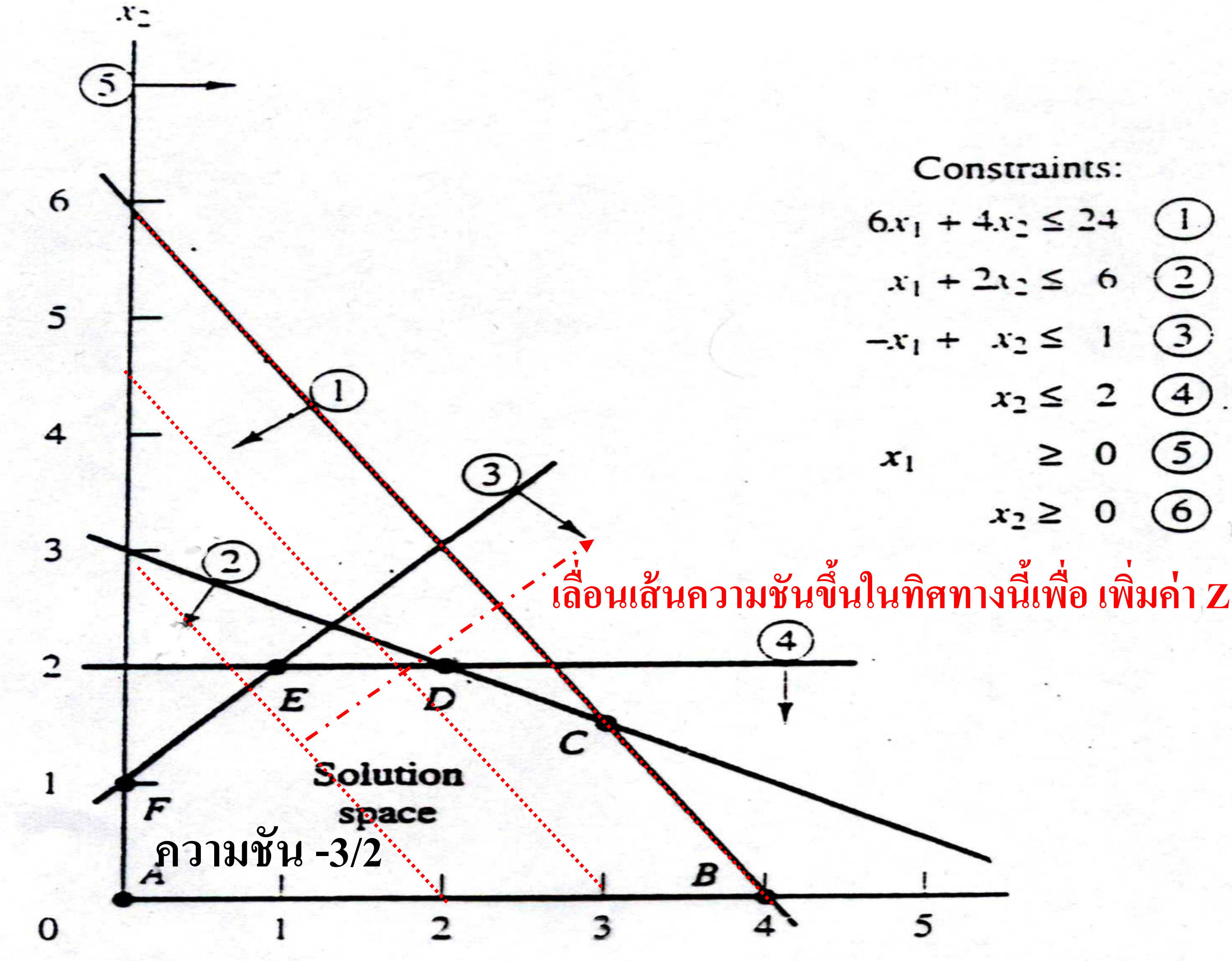
ดังนั้นในกรณีตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่ามีผลลัพธ์ที่ดีที่สุดค่าเดียว จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Unique Optimal Solution** (มีคำตอบที่ดีที่สุดคำตอบเดียว)

จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ **Min** $Z = -X_1 + 2X_2$



ดังนั้น จุดสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งในที่นี้ คือ จุด ..... (....., ...) จะได้ Z = ...

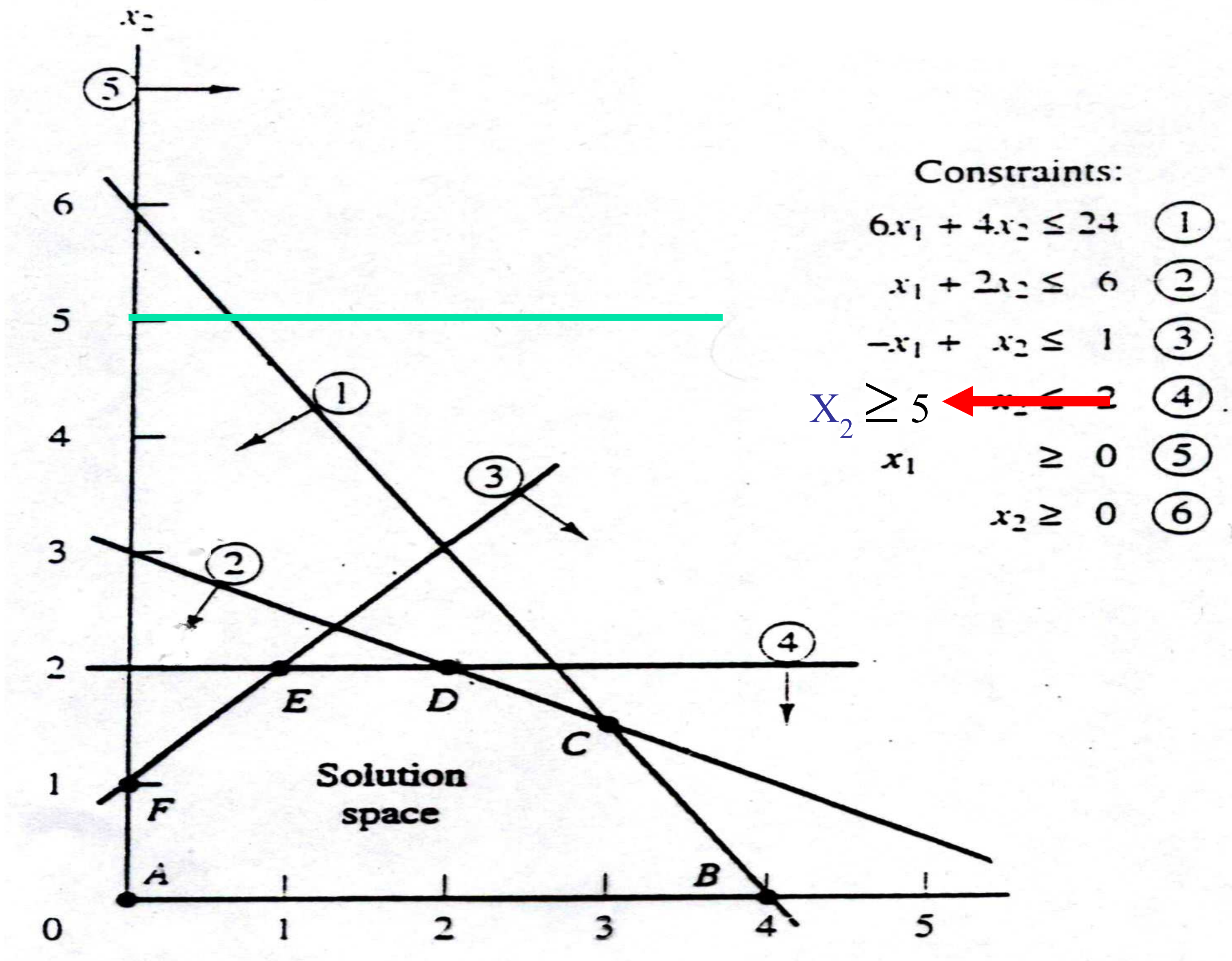
จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ **Max** $Z = 3X_1 + 2X_2$



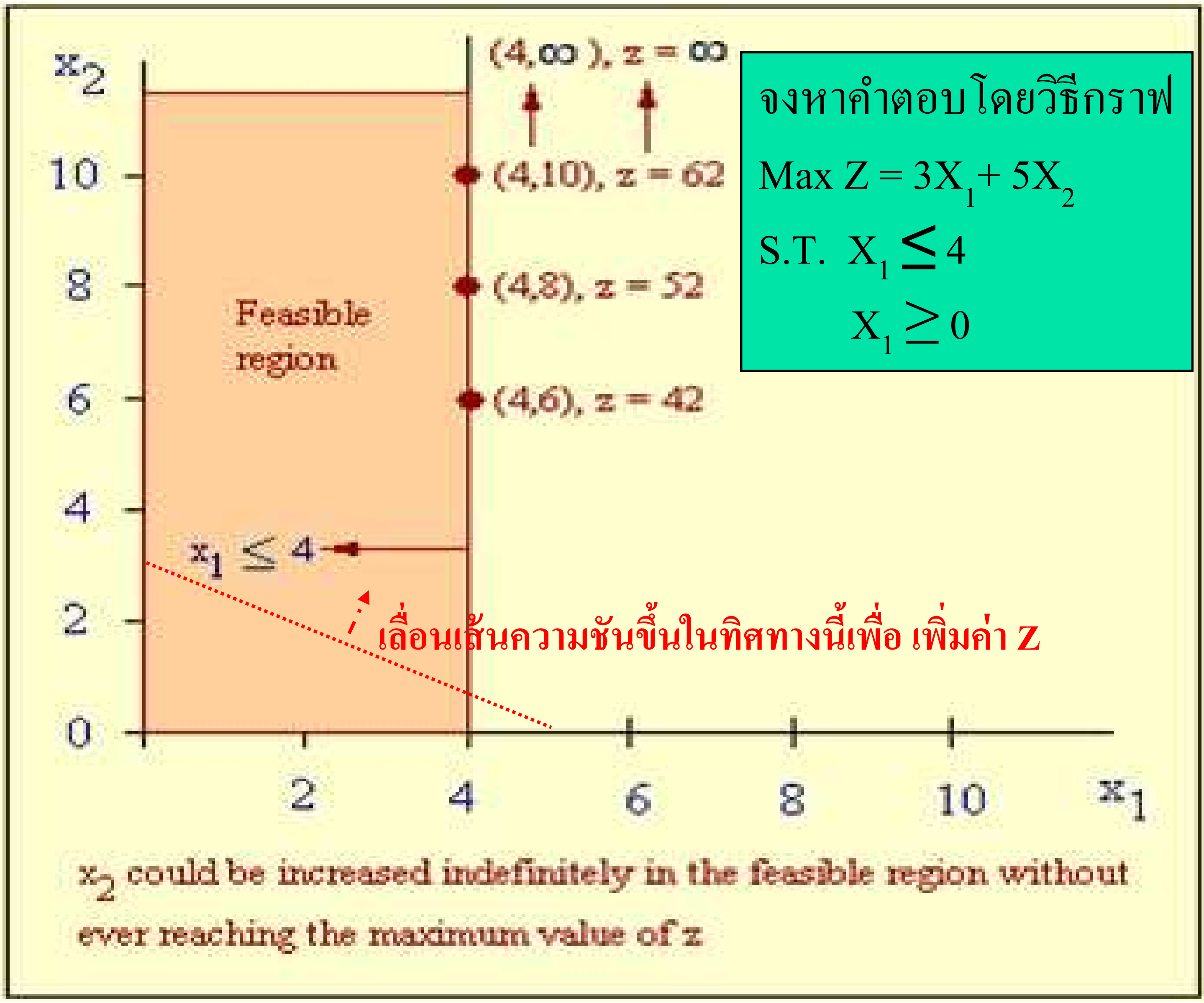
ดังนั้น จุดสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งในที่นี้ คือ จุด ..... (....., ...) จะได้ Z = ...

จะเห็นได้ว่ามีหลายผลลัพธ์ที่ดีที่สุดที่ให้ค่า Z เดียวกัน จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Multiple Optimal Solution** (มีหลายคำตอบที่ให้ค่า Z เดียวกัน) ซึ่งสังเกตได้จาก เมื่อลากเส้นความชันเพื่อให้สอดคล้องกับฟังก์ชั่นเป้าหมาย จะได้ดังนั้นเส้นสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (เส้นความชันทับกับเส้นใดเส้นหนึ่งของสมการเงื่อนไข)

จงหาคำตอบโดยวิธีกราฟ **Max** $Z = 3X_1 + 2X_2$



จะเห็นได้ว่าสมการเงื่อนไขนี้ทำให้ไม่มี พื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (No Feasible Region) เพราะไม่มีพื้นที่ที่ทับซ้อนกันของทุกสมการเงื่อนไข (No Intersection Area) ซึ่งแสดงว่าไม่มีผลลัพธ์ที่ทำให้ทุกสมการเงื่อนไขเป็นจริง จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Infeasible Solution** (ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้) ซึ่งทำให้ไม่มีผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (No Optimal Solution)



จะเห็นได้ว่ามีพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible Region) แต่เมื่อลากเส้นความชันขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับฟังก์ชั่นเป้าหมาย ไม่สามารถหาขอบเขตของผลลัพธ์ได้ จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Unbounded Solution** (ไม่มีขอบเขตของผลลัพธ์) ซึ่งทำให้ไม่มีผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (No Optimal Solution)

ถ้าเปลี่ยน Max เป็น Min ค่าผลลัพธ์?

วิธีกราฟ (*Graphical Method*)

Consider this model. (Winston 1994)

Minimize $Z = 50x_1 + 100x_2$

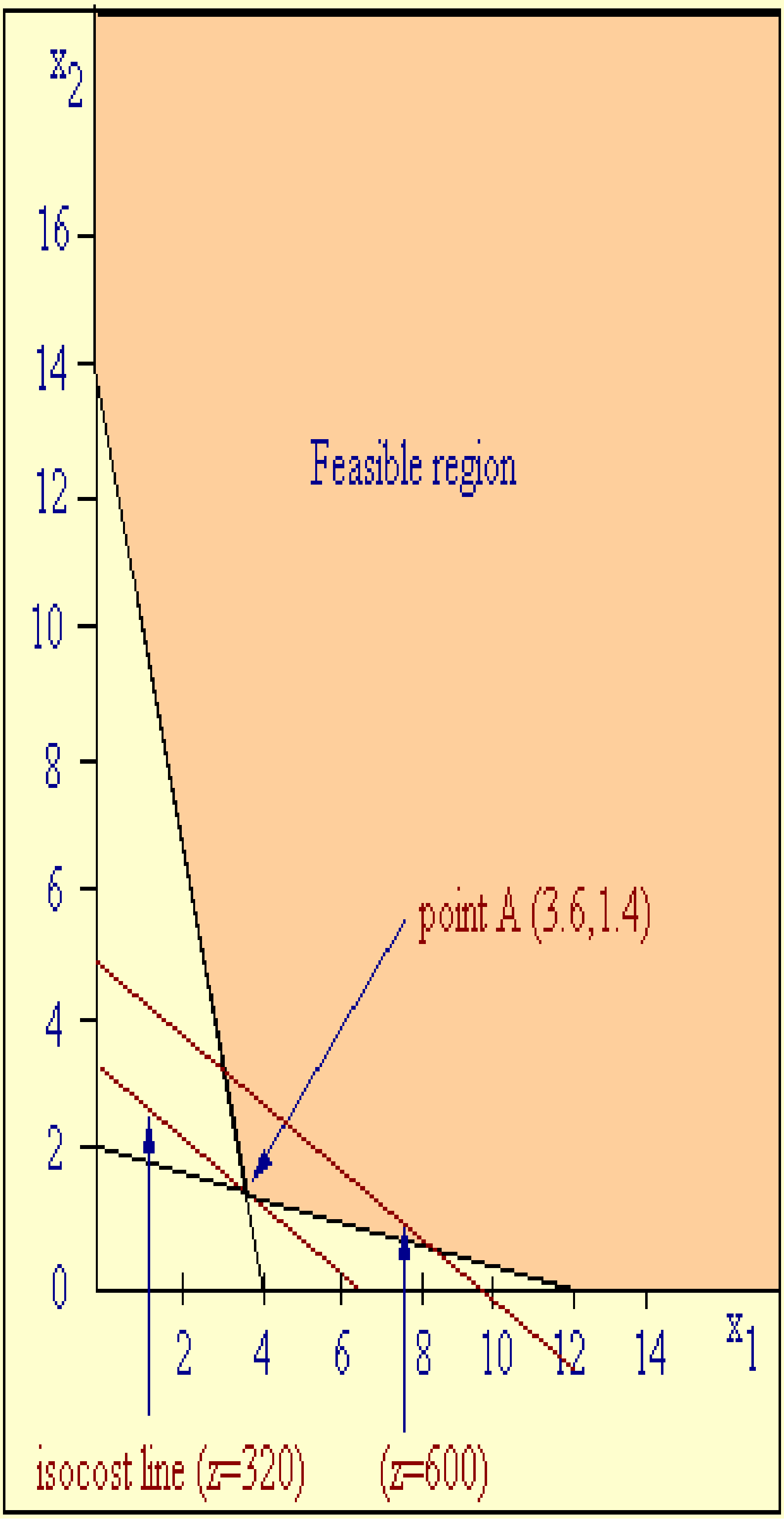
Subject to

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

We begin by graphing the feasible region. It contains points for which the value of at least one variable can assume arbitrarily large values. Such a feasible region is called an unbounded feasible region.

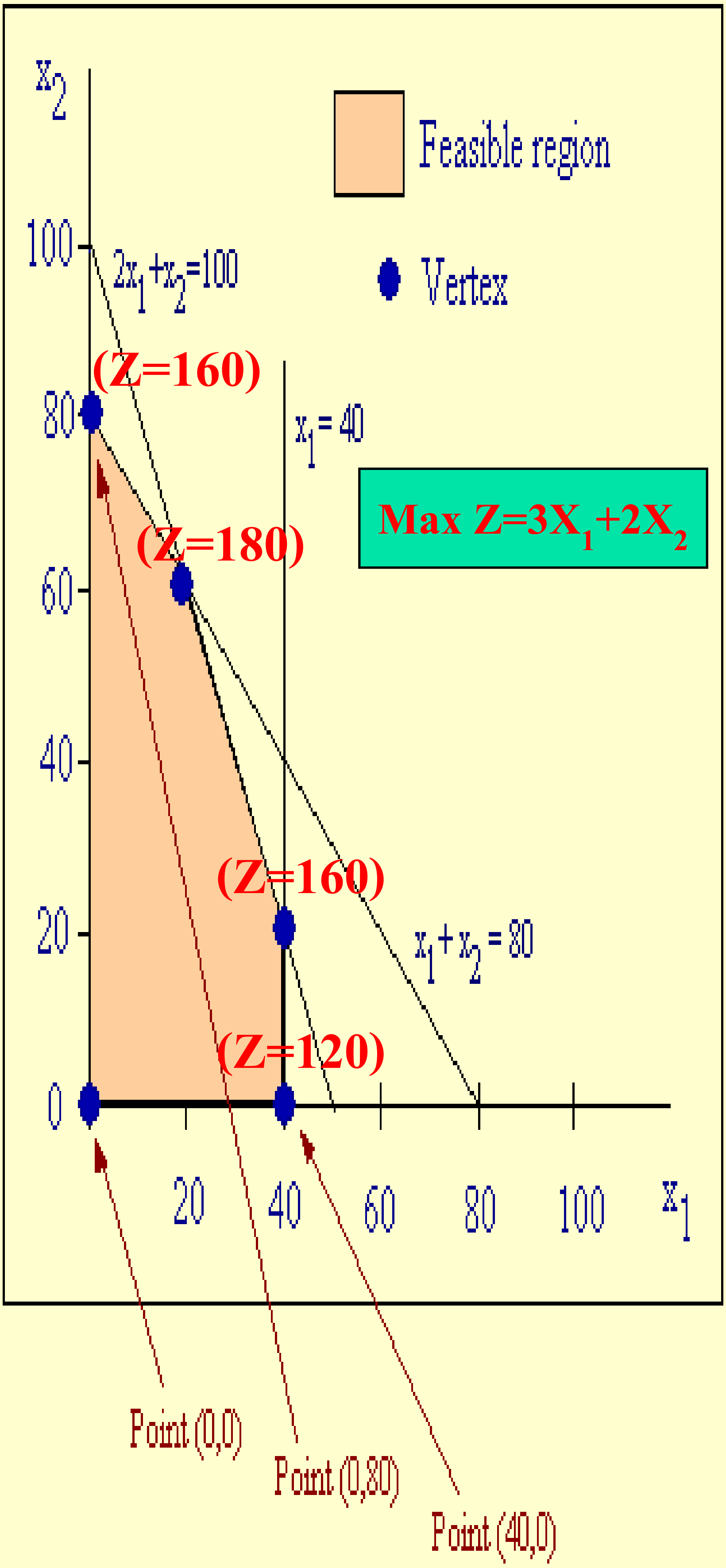


จุดสุดท้ายก่อนออกจากพื้นที่ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งในที่นี้ คือ จุด (3.6, 1.4) จะได้ Z = 320 ดังนั้นในกรณีตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่ามีผลลัพธ์ที่ดีที่สุดค่าเดียว จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Unique Optimal Solution** (มีคำตอบที่ดีที่สุดคำตอบเดียว)

Concept of Simplex Method

The optimal solution will be at a vertex. The simplex method will stay on the boundary and examine only the vertices (corners). It will travel from one corner point to the next until no direction exists for which movement will better the objective. (Shapiro 1984)

Firstly, point (0,0) is chosen (x_1 and x_2 are nonbasic variables). We want to maximize the objective, so the simplex method looks for a direction in which to move that will increase the objective. It can move to point (0,80) and (40,0) which are be adjacent to (0,0).



วิธีทางพีชคณิต (*Algebraic Method*)

$$\max Z = CX$$
$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$

=>

$$A^{-1}AX \le A^{-1}b$$
$$\Downarrow$$
$$IX \le A^{-1}b$$
$$X \le A^{-1}b$$

ดังนั้นการหาค่าของ X_i ได้จากวิธีทางพีชคณิตตามหลัก **Matrix**

$$[\; A \;|\; I \;|\; b \;]$$

$$[A^{-1}A \;|\; A^{-1}I \;|\; A^{-1}b]$$ => จะหาinverse matrix

โดยวิธี ***Gauss Jordan Method***

$$[\; I \;|\; A^{-1} \;|\; A^{-1}b \;]$$

ex

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

ทำให้เป็น 0

ทำให้เป็น 0

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

ทำให้เป็น 1

$$\begin{array}{l} \\ (ROW2)+2*(ROW1) \\ (ROW3)-(ROW1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

ทำให้เป็น 0

$$\begin{array}{l} \\ \frac{1}{3}*(ROW2) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} (ROW1)-(ROW2) \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{2}*(ROW3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

ทำให้เป็น 0

$$\begin{array}{l} (ROW1)+\frac{2}{3}*(ROW3) \\ (ROW2)+\frac{1}{3}*(ROW3) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพลกซ์

(Simplex Method)

รูปแบบมาตรฐาน

1. ทุก ๆ ข้อจำกัดเขียนอยู่ในรูปสมการ ยกเว้นข้อจำกัดของตัวแปรยังคงอยู่ในรูปอสมการ ($X_j \geq 0$)
2. ค่าคงที่ด้านขวามือของสมการข้อจำกัด (RHS) ต้องไม่เป็นลบ
3. ตัวแปรทุกตัวต้องไม่เป็นลบ
4. ฟังก์ชันเป้าหมายจะอยู่ในรูปการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

- $X_1 + X_2 = 3$ =>
- $X_1 + X_2 \geq -2$ =>
- $X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 10$ =>
- $X_1 + X_2 \geq 3$ =>

Simplex Method (Continue)

Basic Variable (BV) คือ อ่านค่าจากidentity matrix และเป็นผลลัพธ์เบื้องต้น (initial feasible solution)=> $\geq$ 0 เสมอ

Non-basic Variable (NBV) คือ ตัวแปรที่ถูกกำหนดให้มีค่าเริ่มต้นเป็น 0 (ตัวที่ไม่ใช่ I (Identity Matrix)) เพื่อจะได้หาค่าของ BV ออกมาจากสมการขอบเขตจำกัดได้

สรุปตัวแปรที่เพิ่มขึ้นมา

ตัวแปรขาด (slack variable)	$\leq$	$+s_1$
ตัวแปรเกิน (surplus variable)	$\geq$	$-s_1 + r_1$
ตัวแปรเทียม (artificial variable)	=	$+r_1$

กรณีรูปแบบมาตรฐานมี m สมการ n ตัวแปร และ $n \geq m$ จะแก้สมการได้ก็ต่อเมื่อ กำหนดให้ n-m ตัวแปรมีค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ จึงสามารถหาคำตอบของตัวแปรจำนวน m ตัวได้ ดังนั้น **จำนวนตัวแปรมูลฐาน (BV) = จำนวนสมการเงื่อนไข**

ทวน

- จำนวนคำตอบBasic Variable (BV) = จำนวนสมการเงื่อนไข

  อ่านค่าจาก **I**

  ส่วนตัวแปรที่เหลือเป็น Non-Basic Variable (NBV) มีค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์

- Simple Simplex Method ใช้ในกรณีที่ทุกสมการเงื่อนไขอยู่ในรูป $\leq$ เท่านั้น (มีSlack Variable มาเกี่ยวข้อง)

  แต่กรณีที่มี Artificial Variable มาเกี่ยวข้องด้วย ต้องพัฒนามาใช้ วิธี Big-M Method หรือTwo-Phase Method

- RHS $\geq$ 0 เสมอเพราะใช้อ่านค่าผลลัพธ์เบื้องต้น

  (all positive value)

ตย. Max $Z = 3X_1 + 5X_2$ $\Rightarrow$ $Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$

S.T.

$$X_1 \le 4 \qquad\qquad X_1 + S_1 = 4$$

$$2X_2 \le 12 \quad \Rightarrow \text{Std.} \quad 2X_2 + S_2 = 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 18 \qquad\qquad 3X_1 + 2X_2 + S_3 = 18$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

ตารางเริ่มต้น(initial tableau)

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ RHS	Ratio
		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
s_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
s_2	2	0	0	2	0	1	0	12	
s_3	3	0	3	2	0	0	1	18	

$S_1 = 4$, $S_2 = 12$ และ $S_3 = 18$ เป็นคำตอบเริ่มต้น

ดังนั้นข้อสังเกตของการเลือกตัวแปรเข้าของโจทย์ Max ทำไมเลือก ส.ป.ส ในแถวที่ศูนย์ของตัวแปรไม่มูลฐาน เป็นลบมากสุด (Most Negative) ปรับปรุงก่อน เพราะยิ่ง ส.ป.ส ในแถวที่ศูนย์นี้ เป็นลบมากๆ ยิ่งมีสิทธิเพิ่ม Z ได้มากขึ้น

และการเลือกตัวแปรออกทำไมดูจากอัตราส่วน (Ratio) ของสมการเงื่อนไข จากโจทย์

- **สมการเงื่อนไขที่ 1 (แถวที่ 1): ไม่มี X_2 ในสมการ (0) การเปลี่ยนแปลงไม่มีผลกับ X_2**
- **สมการเงื่อนไขที่ 2 (แถวที่ 2): $2X_2$-$+S_2 = 12$ ถ้าให้ S_2 เป็น 0 $\longrightarrow X_2$ เพิ่มได้มากสุด 6**
- **สมการเงื่อนไขที่ 3 (แถวที่ 3): $2X_1+S_3 = 18$ ถ้าให้ S_3 เป็น 0 $\longrightarrow X_2$ เพิ่มได้มากสุด 9**

เพื่อให้ทุกสมการข้อจำกัดเป็นจริง เลือก X_2 เพิ่มค่าได้มากสุด **6**

	ค่าอัตราส่วน (Ratio)
สมการเงื่อนไขที่ 1	$4/0 = \infty$
สมการเงื่อนไขที่ 2	$12/2 = 6$
สมการเงื่อนไขที่ 3	$18/2 = 9$

ดังนั้นเลือก S_2 เป็นตัวแปรออก จากนั้นทำ Row Operation เพื่อให้เกิด I (Identity Matrix) ในคอลัมน์ของตัวแปร X_2

ทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ค่าคงที่ขวามือ RHS	Ratio
	Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
0	s_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
	← s_2	2	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12	
	s_3	3	0	3	2	0	0	1	18	
	Z	0	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	s_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4
1	x_2	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	∞
	← s_3	3	0	$\boxed{3}$	0	0	-1	1	6	2
	Z	0	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36	
	s_1	1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
2	x_2	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
	x_1	3	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	

(0*) = (0)+5(2*)

(1*) =(1)

(2*) = (2)/2

(3*) = (3)-2(2*)

(0) = (0*)+3(3**)**

(1) = (1*)-(3**)**

(2) = (2*)**

(3) = (3*)/3**

Optimal Solution (คำตอบ) $S_1 = 2, X_2 = 6, X_1 = 2, S_2 = 0, S_3 = 0$

และ $Z = 36$ เพราะ $Z + 3/2S_2 + S_3 = 36$ ดังนั้น $Z = 36$

Simplex Proceeds

1. ทำ LP ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน
2. หา BV และ NBV และใส่ค่าทั้งหมดไว้ในตาราง tableau
3. หา current optimal
4. ดู NBV ใน (row 0)

Objective function:

Max → coefficients เป็น “–” เราจะเลือกลบมากสุด

Min → coefficients เป็น “+” เราจะเลือกบวกมากสุด

Simplex Proceeds (Continue)

5. เราจะเลือก (จากข้อ 4) เพื่อเป็น Entering Variable

เพื่อเปลี่ยน $NBV_{\text{ค}} \rightarrow BV_{\text{ม}}$ โดยพิจารณา Ratio

$$ratio = \frac{RHS}{\text{Coef.of entering variable in constraint}}$$

เมื่อเราเปลี่ยน $NBV_{\text{ค}} \rightarrow BV_{\text{ม}}$ เราต้องเปลี่ยน$BV_{\text{ค}} \rightarrow NBV_{\text{ม}}$

เราเรียกการเปลี่ยน $BV_{\text{ค}} \rightarrow NBV_{\text{ม}}$ นี้ว่า Leaving Variable

วิธีการดึง $BV_{\text{ค}}$ ออกโดยดูจาก Ratio

Leaving Variable = min { ratio, 0 }

⇩ พิจารณาค่า "+" หรือ 0 เท่านั้น

6. ทำซ้ำ (Iterative step) ข้อ (2-5) ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งใน

row 0 ในตาราง tableau (ทำ row operation เพื่อให้เกิด I)

Max → coefficients เป็น "+" หมด

} => ***Optimal***

Min → coefficients เป็น "-" หมด

จากนั้นอ่านค่าOptimal Solution(ผลลัพธ์เหมาะที่สุด)จากตาราง

ตัวอย่างการแปลงสมการ กรณีที่ตัวแปรบางตัวมีค่าเป็นลบ

เช่น Max $Z = 3X_1 + 5X_2$

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq -10, X_2 \geq 0$$

ซึ่งจะพิจารณาเป็น $-X_1 \leq 10$ ไม่ได้เพราะอย่างไร X_1 ก็มีโอกาสให้ค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้นต้องเปลี่ยนตัวแปร X_1 เสียใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวแปรอื่นเพื่อให้สมการอยู่ในรูปมาตรฐาน คือการทำ $X_1+10 \geq 0$ และกำหนดให้ (X_1+10) อยู่ในรูปของตัวแปรอื่น X_1' โดยที่ $X_1' = (X_1+10)$ ดังนั้น $X_1' \geq 0$ และ $X_1 = X_1' - 10$

จากนั้นนำ $X_1 = X_1' - 10$ ไปแทนในสมการเป้าหมายและทุกสมการเงื่อนไข

$\therefore$ กลายเป็น Max $Z = 3(X_1' - 10) + 5X_2$

$$(X_1' - 10) \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3(X_1' - 10) + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1' \geq 0, X_2 \geq 0$$

เมื่อคำนวณหาค่า X_1' และ X_2 โดยวิธีซิมเพล็กซ์หรือกราฟแล้วจึงหาค่า $X_1 = (X' - 10)$

ตัวอย่างการแปลงสมการ กรณีที่ตัวแปรบางตัวมีค่าเป็นลบ

อีกหนึ่งตัวอย่างคือ ถ้าเปลี่ยนโจทย์ข้างต้นจาก $X_1 \geq -10$ เป็น X_1 ไม่จำกัดเครื่องหมายซึ่งแสดงว่า X_1 มีค่าเป็น บวก (+), ลบ (-) หรือศูนย์ (0) ก็ได้ ดังนั้นต้องเปลี่ยนตัวแปร X_1 เสียใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวแปรอื่นเพื่อให้สมการอยู่ในรูปมาตรฐาน คือการทำ $X_1 = X_1' - X_1''$ โดยที่ $X_1' \geq 0$ และ $X_1'' \geq 0$

$\therefore$ กลายเป็น $\text{Max } Z = 3(X_1' - X_1'') + 5X_2$

$$\left.\begin{aligned} (X_1' - X_1'') &\leq 4 \\ 2X_2 &\leq 12 \\ 3(X_1' - X_1'') + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1' \geq 0,\ X_1'' \geq 0 \text{ และ } X_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

แก้โดยวิธีซิมเพล็กซ์ เมื่อได้ค่ามาแล้วค่อยหา

$X_1 = X_1' - X_1''$

ตย. Min $Z = 2X_1 - 3X_2$

S.T. $X_1 + X_2 \leq 4$ => ***Std.***

$X_1 - X2 \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

ตาราง(tableau)

ทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ			ค่าคงที่ขวามือ RHS
			Z			
	Z	0				
0						
	Z					
1						

Ratio ⇩

Optimal Solution (คำตอบ) $S_2 = 10, X_2 = 4, X_1 = 0, S_1 = 0$

และ $Z = 2X_1 - 3X_2$

$= 2(0)-3(4) = -12$

ดังนั้น $Z = -12$

ตย. Max $Z = 2X_1 + 3X_2$ 　　　 $Z - 2X_1 - 3X_2 = 0$

S.T. $X_1 - X_2 \le 2$ 　　　 $X_1 - X_2 + S_1 = 2$

$-3X_1 + X_2 \le 4$ 　 รูปมาตรฐาน $\Longrightarrow$ 　 $-3X_1 + X_2 + S_2 = 4$

$X_1, X_2 \ge 0$

ตาราง(tableau)

ทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ Z	X_1	X_2	S_1	S_2	ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
	Z	1	-2	-3	0	0	0	
0	S_1	0	1	-1	1	0	2	none
	S_2	0	-3	1	0	1	4	4
	Z	1	-11	0	0	3	12	
1	S_1	0	-2	0	1	1	6	none
	X_2	0	-3	1	0	1	4	none

(0*) = (0)+3(2*)

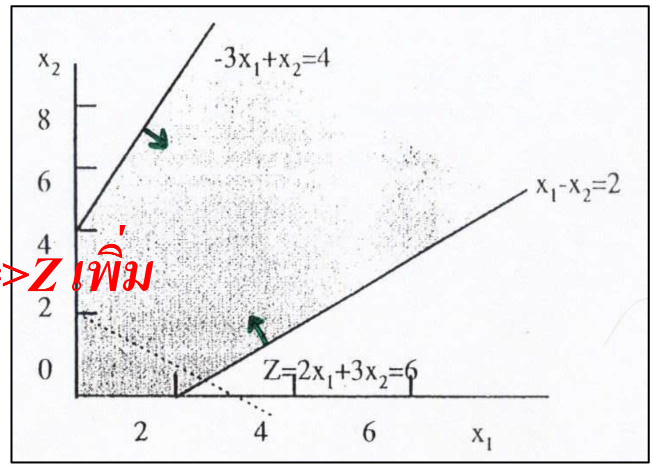
(1*) = (1)+(2*)

(2) = (2*)

$-2X_1 + S_1 = 6$ เพิ่ม X_1 ทำให้ S_1 เพิ่ม

$-3X_1 + X_2 = 4$ เพิ่ม X_1 ทำให้ X_2 เพิ่ม

} => Z เพิ่ม



เนื่องจากไม่มีตัวแปรออก แสดงว่าไม่มีสมการเงื่อนไขควบคุมทำให้ตัวแปร X_1 เพิ่มเท่าไหร่ก็ได้ ทำให้ Z เพิ่มได้ถึง ∞ จึงสรุปผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า ***Unbounded Solution***

ตย. $\text{Max } Z = 36X_1 + 30X_2 - 3X_3 - 4X_4$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - X_3 \leq 5$$

$$6X_1 + 5X2 - X_4 \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

ตารางสุดท้าย(last tableau)

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2		
Z	1	0	2	-9	0	12	4	100	
X_4	0	0	1	-6	1	6	-1	20	none
X_1	0	1	1	-1	0	1	0	5	none

เพิ่ม X_3 ทำให้ X_4 เพิ่ม
เพิ่ม X_3 ทำให้ X_1 เพิ่ม } ***=>Z เพิ่ม***

เนื่องจากไม่มีตัวแปรออก แสดงว่าไม่มีสมการเงื่อนไขควบคุมทำให้ตัวแปร X_3 เพิ่มเท่าไหร่ก็ได้ ทำให้ Z เพิ่มได้ถึง∝ สรุปผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Unbounded**

จากตัวอย่างข้างต้นสมการข้อจำกัดอยู่ในรูปเครื่องหมายน้อยกว่าเท่ากับ ($\leq$) ตัวแปรที่เพิ่มเข้ามาเมื่อทำตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน คือ ตัวแปรขาด (Slack Variable) แต่ในกรณีที่สมการข้อจำกัดอยู่ในรูปเครื่องหมายเท่ากับ (=) และเครื่องหมายมากกว่าเท่ากับ ($\geq$) จะมีการใช้ตัวแปรเทียม (Artificial Variable) เพิ่มเข้ามาเมื่อทำตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ซึ่งการใช้วิธีซิมเพล๊กซ์ ธรรมดาไม่สามารถหาคำตอบได้ จึงมีการพัฒนาวิธีซิมเพล๊กซ์ธรรมดามาเป็นอีก 2 วิธี คือ

- **การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค บิ๊กเอ็ม (Big-M Method)**
- **การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค 2ระยะ (Two Phase Method)**

การแก้ปัญหาโดยเทคนิค M (Big-M Method)

1. ทำตัวแบบเชิงเส้นให้อยู่ในรูปมาตรฐาน
2. เมื่อเติมตัวแปรเทียมในข้อจำกัดแล้ว(รูปมาตรฐาน) โดยตัวแปรเทียม (r) ≥ 0
3. จากนั้น กำหนดค่าของ **M** เป็นบวกที่มีค่าใหญ่มาก ๆ ให้เป็น ส.ป.ส ของตัวแปรเทียม (R) เติมเข้าไปทางซ้ายมือของสมการเป้าหมายเดิม โดยต้องใส่ขัดกับเป้าหมายเดิม โดยถ้าฟังก์ชันเป้าหมายนี้มี
   - *ค่ามาก (Maximize)* ให้ใส่ $+\sum_{i=1}^{n} MR_i$ เข้าไปทางซ้ายมือของสมการเป้าหมายเดิม
   - *ค่าน้อย (Minimize)* ให้ใส่ $-\sum_{i=1}^{n} MR_i$ เข้าไปทางซ้ายมือของสมการเป้าหมายเดิม
4. เขียนตารางเริ่มต้นของซิมเพล๊กซ์

   โดยหา ตัวแปรมูลฐาน และ ตัวแปรไม่มูลฐาน ใส่ค่าทั้งหมดไว้ในตารางเริ่มต้นของซิมเพล๊กซ์ โดยให้ตัวแปรเทียมทุกตัวเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น โดยการให้ตัวแปรเทียมทุกตัวเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น ทำได้โดยการทำ Row Operation เพื่อให้เกิด I (Identity Matrix) ในคอลัมน์ของตัวแปรเทียม (R_i) หรือการทำ R_i ให้อยู่ในรูปของตัวแปรอื่นโดยการแทนค่านั้นเอง
5. แก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล๊กซ์

ตย. (0) Max $Z = 3X_1 + 5X_2$ $\quad$ $Z - 3X_1 - 5X_2 + MR_3 = 0$

S.T. (1) $X_1 \leq 4$ $\quad$ $X_1 + S_1 = 4$

(2) $2X_2 \leq 12$ => ***Std.*** $\quad$ $2X_2 + S_2 = 12$

(3) $3X_1 + 2X_2 = 18$ $\quad$ $3X_1 + 2X_2 + R_3 = 18$

(4) $X_1, X_2 \geq 0$

คำตอบมูลฐานเริ่มต้น $(X_1, X_2, S_1, S_2, R_3) = (0, 0, 4, 12, 18)$

จาก (3) $R_3 = 18 - 3X_1 - 2X_2$ แทนใน (0)

$$Z - 3X_1 - 5X_2 + M(18 - 3X_1 - 2X_2) = 0$$

$$Z - (3M+3)X_1 - (2M+5)X_2 + 18M = 0$$

$$Z - (3M+3)X_1 - (2M+5)X_2 = -18M$$

การทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R	ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน
	Z	1	$-3M-3$	$-2M-5$	0	0	0	$-18M$	
	s_1	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	s_2	0	0	2	0	1	0	12	
	R	0	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{3} = 6$
$(0)+(3M+3)(1)$	Z	1	0	$-2M-5$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$	
	x_1	0	1	0	1	0	0	4	
1	s_2	0	0	2	0	1	0	12	$\frac{12}{2} = 6$
$(3)-3(1)$	R	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	1	6	$\frac{6}{2} = 3^*$
$(0)+(2M+5)(3^*)$	Z	1	0	0	$\frac{9}{2} = 3M+3-\frac{3}{2}(2M+5)$	0	$M+\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(2M+5)$	$27 = -6M+12+3(2M+5)$	
	x_1	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
$(2)-2(3^*)$ 2	s_2	0	0	0	$\boxed{3}$	1	-1	6	$\frac{6}{3} = 2^*$
$(3^*) = \frac{(3)}{2}$	x_2	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
$(0)+\frac{9}{2}(2^*)$	Z	1	0	0	0	$\frac{3}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{9}{2}$	$M+1 = M+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}(\frac{9}{2})$	$36 = 27+\frac{9}{2}(2)$	
$(1)-(2^*)$	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
$(2^*) = \frac{(2)}{3}$ 3	s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
$(3)+\frac{3}{2}(2^*)$	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

	ทำซ้ำ ครั้งที่	ตัวแปร มูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
			Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_3		
		Z	1	-3M-3	-2M-5	0	0	0	-18M	
		S_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1 =4*
	0	S_2	0	0	2	0	1	0	12	
		R_3	0	3	2	0	0	1	18	18/3 =6
(0*)=(0)+(3M+3)(1*)		Z	1	0	-2M-5	3M+3	0	0	-6M+12	
(1*)=(1)		X_1	0	1	0	1	0	0	4	
(2*)=(2)	1	S_2	0	0	2	0	1	0	12	12/2 =6
(3*)=(3)-3(1*)		R_3	0	0	2	-3	0	1	6	6/2 =3*
(0**)=(0*)+(2M+5)(3**)		Z	1	0	0	-9/2	0	M+(5/2)	27	
(1**)=(1*)		X_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1 =4
(2**)=(2*)-2(3**)	2	S_2	0	0	0	3	1	-1	6	6/3 =2*
(3**)=(3*)/2		X_2	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	
(0***)=(0**)+9/2(2***		Z	1	0	0	0	3/2	M+1	36	
(1***)=(1**)-(2***)		X_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	
(2***)=(2**)/3	3	S_1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	
(3***)=(3**)+3/2(2***		X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	

ตย. จงใช้วิธี Big-M เพื่อหาคำตอบ พร้อมสรุปคำตอบของผลลัพธ์

Max $Z= 3X_1 + 2X_2$		$Z -3X_1 - 2X_2 + \mathbf{M}R_2$	$= 0$
S.T. $2X_1 + X_2 \leq 2$		$2X_1 + X_2 + S_1$	$= 2$
$2X_1 + 4X_2 \geq 12$	รูปมาตรฐาน $\Longrightarrow$	$2X_1 + 4X_2 \quad - S_2 + R_2$	$=12$
$X_1, X_2 \geq 0$			

ตาราง(tableau)

ตัวแปรมูลฐาน	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	ค่าคงที่ขวามือ
Z	1	-3	-2	0	0	M	0
S_1	0	2	1	1	0	0	2
R_2	0	2	4	0	-1	1	12

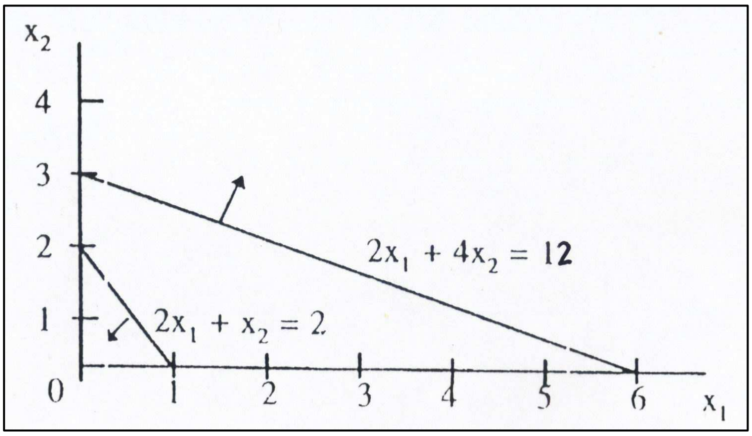
กำหนดให้ตัวแปรเทียมทุกตัวเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น โดยการให้ตัวแปรเทียมทุกตัวเป็นคำตอบมูลฐานโดยการทำ คอลัมน์ของตัวแปรเทียม (R_i) ให้เกิด I (Identity Matrix) หรือการทำ R_i ให้อยู่ในรูปของตัวแปรอื่นโดยการแทนค่านั้นเอง

จาก (2) $R_2= 12 - 2X_1 - 4X_2+ S_2$ แทนใน (0)

$$Z -3X_1 -2X_2 + \mathbf{M}(12 - 2X_1 - 4X_2+ S_2) = 0$$

$$Z + (-3-2\mathbf{M})X_1 + (-2-4\mathbf{M})X_2 + \mathbf{M}S_2 = -12\mathbf{M}$$

ดังนั้นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น $(X_1, X_2, S_1, S_2, R_2) = (0, 0, 2, 0, 12)$



ตัวแปรมูลฐาน	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	ค่าคงที่ขวามือ
Z	1	-3-2M	-2-4M	0	M	0	-12M
S_1	0	2	1	1	0	0	2
R_2	0	2	4	0	-1	1	12
Z	1	1+6M	0	2+4M	M	0	4-4M
X_2	0	2	1	1	0	0	2
R_2	0	-6	0	-4	1	1	4

โจทย์ข้อนี้ฟังก์ชันเป้าหมายมีค่ามาก (Maximize) ซึ่งในที่นี้ ส.ป.ส ในแถวที่ศูนย์หน้าตัวแปรไม่มูลฐาน (NBV) มีค่าเป็นบวกหมด แสดงว่าไม่สามารถเพิ่มค่า Z ได้อีก แต่จากการอ่านผลลัพธ์ $R_2 = 4$ ซึ่งเป็นตัวแปรเทียมและต้องมีค่าเท่ากับศูนย์เท่านั้น ดังนั้นกรณีที่อ่านผลลัพธ์แล้วได้ $Ri > 0$ แสดงว่าไม่มีผลลัพธ์ที่ทำให้ทุกสมการเงื่อนไขเป็นจริง จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Infeasible Solution** (ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้) ซึ่งทำให้ไม่มีผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (No Optimal Solution) ดังนั้นโจทย์ข้อนี้ $R_2 > 0$ แสดงว่าผลลัพธ์เป็น **Infeasible Solution**

ตย. จงหาคำตอบของปัญหาโดยวิธี Big-M

(0)	Min $Z = 3X_1 + 5X_2$		$Z - 3X_1 - 5X_2 - MR_2 - MR_3 = 0$
(1)	$X_1 \leq 1$		$X_1 + S_1 = 1$
(2)	$2X_2 = 12$	=> *Std.*	$2X_2 + R_2 = 12$
(3)	$3X_1 + 2X_2 \geq 18$		$3X_1 + 2X_2 - S_3 + R_3 = 18$
(4)	$X_1, X_2 \geq 0$		

คำตอบมูลฐานเริ่มต้น$(X_1, X_2, S_1, S_3, R_2, R_3) = (0, 0, 1, 0, 12, 18)$

จาก (2) $R_2 = 12 - 2X_2$ แทนใน (0)

$R_3 = 18 - 3X_1 - 2X_2 + S_3$ แทนใน (0)

จะได้

$$Z - 3X_1 - 5X_2 - M(12 - 2X_2) - M(18 - 3X_1 - 2X_2 + S_3) = 0$$

$$Z + (3M-3)X_1 + (4M-5)X_2 - MS_3 = 30M$$

ตารางเริ่มต้น(initial tableau)

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
	Z	X_1	X_2	S_1	R_2	S_3	R_3		
Z	1	3M-3	4M-5	0	0	-M	0	30M	
S_1	0	1	0	1	0	0	0	1	
R_2	0	0	2	0	1	0	0	12	12/2 =6*
R_3	0	3	2	0	0	-1	1	18	18/2 =9

ลักษณะผลลัพธ์ของโปรแกรมเชิงเส้น

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible Solution) เป็นผลลัพธ์ที่ทำให้เงื่อนไขบังคับทุกข้อเป็นจริง

กรณีไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Infeasible Solution)

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อไม่มีจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทั้งหมดแม้แต่จุดเดียว นั่นคือไม่มีบริเวณของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

ผลลัพธ์เหมาะที่สุด (Optimal Solution) เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ซึ่งทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าดีที่สุด คำว่าดีที่สุดหมายถึงมีค่ามากสุดหรือน้อยสุดขึ้นกับว่าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ดังนั้นผลลัพธ์เป้าหมายจึงเป็นผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทั้งหมด และทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่ามากสุด (หรือน้อยสุด)

- *Unique optimal solution*
- *Multiple optimal solutions*

ผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solution)

จากตารางสุดท้ายของซิมเพล๊กซ์ ในกรณีที่ไม่มีตัวแปรใดมีคุณสมบัติเป็นตัวแปรออกได้ นั่นคือสัมประสิทธิ์ทุกตัวในคอลัมน์หลักมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ทำให้ตัวแปรเข้ามีค่าเพิ่มขึ้นได้ได้จำกัด ซึ่งมีผลให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นได้ไม่จำกัดเช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$X_3 = 4$

$-2X_2+X_4=12$ ⇔ Unbound for X_2 can increase till ∞

$-2X_2+X_5=18$

When X_2 is chosen to be entering variable

(most negative on Z in max problem)

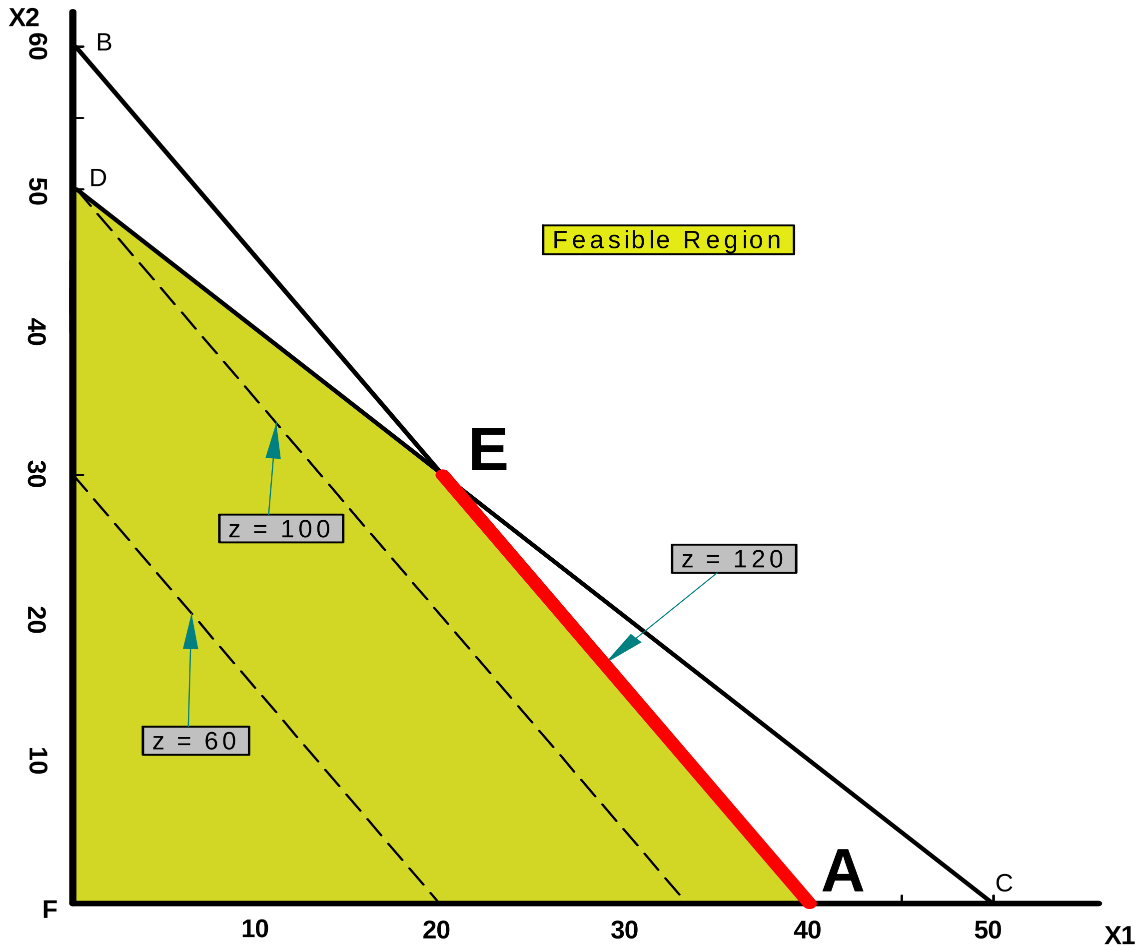
-2

0
-2
-2

⇨ We can't choose to be calculate ratio

(no leaving variable)

กรณีผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดหลายค่า (Multiple Solutions)



กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเงื่อนไขบังคับ ซึ่งทำให้ได้ผลลัพธ์มากกว่าหนึ่งค่า ที่ให้ผลลัพธ์เหมาะที่สุดเท่ากัน

จากตารางสุดท้ายของซิมเพล๊กซ์ กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ ส.ป.ส.ของตัวแปรไม่มูลฐานในแถวที่ศูนย์มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือมีตัวแปรเข้าแต่ไม่ทำให้ค่า Z เปลี่ยนแปลง (เพราะส.ป.ส.ของตัวแปรไม่มูลฐานมีค่าเท่ากับศูนย์) และเมื่อมาพิจารณาตัวแปรออกปรากฎว่ามีตัวแปรที่มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรออกได้ ทำให้ตัวแปรเข้ามีค่าเพิ่มขึ้นได้จำกัด (ค่าของผลลัพธ์เปลี่ยนแปลง) ซึ่งมีผลให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเท่าเดิม ทำให้มีหลายคำตอบที่ให้ค่า Z เดียวกัน

ตารางสุดท้ายของซิมเพล๊กซ์ของปัญหาฟังก์ชันเป้าหมายค่ามาก(Max)

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z	0	0	0	0	10	10	0	280	
S_1	0	-2	0	1	2	-8	0	24	
X_3	0	-2	1	0	2	-4	0	8	
X_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	2/1.25 =1.6*
S_4	0	1	0	0	0	0	1	5	5/1 =5

ผลลัพธ์ คือ$(X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, S_4) = (2, 0, 8, 24, 0, 0, 5)$และ $Z = 280$

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z	0	0	0	0	10	10	0	280	
S_1	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	0	27.2	27.2/1.6 =17
X_3	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	0	11.2	11.2/1.6 =7
X_2	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	0	1.6	1.6/0.8 =2*
S_4	-0.8	0	0	0	0.4	-1.2	1	3.4	

พบว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุดอีกหนึ่งคำตอบ คือ $(X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, S_4) = (0, 1.6, 11.2, 27.2, 0, 0, 3.4)$ ที่ให้ค่า Z เท่ากันคือ 280 ดังนั้นจึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Multiple Optimal Solution** (มีหลายคำตอบที่ให้ค่า Z เดียวกัน)

การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค2ระยะ

(Two Phase Method)

Phase I : ทดสอบว่ามีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้หรือไม่ (Feasible Solution)

- **Min** the sum of artificial variables (objective fn)
- Original constraints
- Give starting basic feasible solution to the second phase
- The end of the 1st phase one of artificial $\neq 0$ then infeasible

ให้สร้างสมการเป้าหมายใหม่เป็นหา***ค่าต่ำสุดของผลบวกของตัวแปรเทียม*** โดยมีข้อจำกัดของปัญหาเดิม แล้วสร้างตารางซิมเพล๊กซ์วิเคราะห์ปัญหา

ถ้าตารางสุดท้ายได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายเป็น 0 แสดงว่าปัญหานั้นมีคำตอบ ให้ทำระยะที่ 2 ต่อไป

ถ้าค่าฟังก์ชันเป้าหมายในระยะที่ 1 ไม่เป็น 0 แสดงว่าปัญหานั้นไม่มีคำตอบจึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Infeasible Solution** (ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้) เพราะไม่สามารถหาตัวแปรมูลฐานใหม่ที่จะเข้าแทนที่ตัวแปรเทียมได้ จึงไม่ต้องทำระยะที่ 2อีก

Phase II : ผลลัพธ์ $z=0$ จาก phase I เราจะทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาจาก phase II

- The original objective fn
- Use new constraints from phase I
- Solve by simplex method

เมื่อได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายใหม่เป็น 0 ให้ใช้คำตอบมูลฐานที่เหมาะสมที่ได้จากระยะที่ 1 ไปเป็นข้อจำกัดใหม่ในตารางเริ่มต้นซิมเพล๊กซ์ของระยะที่ 2 โดยให้**ตัดคอลัมน์ของ R_i ทิ้ง** จากตารางซิมเพล๊กซ์สุดท้ายที่ได้จากระยะที่ 1 (เพราะข้อจำกัดใหม่ที่ได้นี้ทำให้ตัวแปรเทียมทุกตัวเป็นศูนย์แล้ว)

แล้วนำตารางที่ได้ไปเป็นตารางเริ่มต้นซิมเพล๊กซ์ของระยะที่ 2 โดยใช้สมการเป้าหมายเดิมของโจทย์ (***ค่าสูงสุด***หรือ***ค่าต่ำสุด***) จากนั้นแก้ปัญหาโดยวิธี ซิมเพล๊กซ์ต่อไปจน กระทั่งได้คำตอบที่เหมาะสม

ตย. $\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$

$$
\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & 3X_1 + X_2 = 3 \\
& 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\
& X_1 + 2X_2 \leq 4 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Phase I

$\text{Minimize } r = R_1 + R_2$

$$
\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & 3X_1 + X_2 + R1 = 3 \\
& 4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \\
& X_1 + 2X_2 + S_3 = 4 \\
& X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Phase I Minimize $r = R_1 + R_2$

$$
\begin{aligned}
\text{S.T.}\quad & 3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \\
& 4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \\
& X_1 + 2X_2 + S_3 = 4 \\
& X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ตัวแปรมูลฐาน	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
r	0	0	0	-1	-1	0	0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	
S_3	1	2	0	0	0	1	4	
r	7	4	-1	0	0	0	9	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	1
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	6/4
S_3	1	2	0	0	0	1	4	4
r	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2	
X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1	3
R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	6/5
S_3	0	5/3	0	-1/3	0	1	3	9/5
r	0	0	0	-1	-1	0	0	
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5	
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5	
S_3	0	0	1	1	-1	1	1	

- จากตารางสุดท้ายของซิมเพล๊กซ์**ระยะที่ 1 (Phase I)** พบว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้วของฟังก์ชันเป้าหมายมีค่าน้อย (Minimize) โดยการดูที่ ส.ป.ส ในแถวที่ศูนย์หน้าตัวแปรไม่มูลฐาน (NBV) ซึ่งในที่นี้ ส.ป.ส ในแถวที่ศูนย์หน้าตัวแปรไม่มูลฐาน (NBV) มีค่าเป็นลบหมด แสดงว่าไม่สามารถลดค่า Z ได้อีก ดังนั้นจากผลลัพธ์ของระยะที่ 1 จะพบว่า $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ และ $Z = 0$ แสดงว่ามีผลลัพธ์ที่ทำให้ทุกสมการเงื่อนไขเป็นจริง จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Feasible Solution** (มีคำตอบที่เป็นไปได้) จากนั้นทำ**ระยะที่ 2 (Phase II)** ต่อ
- แต่ถ้ากรณีที่อ่านผลลัพธ์แล้วได้ $R_i > 0$ แสดงว่าไม่มีผลลัพธ์ที่ทำให้ทุกสมการเงื่อนไขเป็นจริง จึงเรียกผลลัพธ์ลักษณะนี้ว่า **Infeasible Solution** (ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้) ซึ่งทำให้ไม่มีผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (No Optimal Solution)

Phase II Minimize $Z = 4X_1 + X_2$

$$
\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad X_1 + \tfrac{1}{5} S_2 &= 3/5 \\
X_2 - 3/5\, S_2 &= 6/5 \\
S_2 + S_3 &= 1 \\
X_1, X_2, S_2, S_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ทำคอลัมน์ของ X_1 และ X_2 ให้เกิด I (Identity Matrix)

ตัวแปรมูลฐาน	X_1	X_2	S_2	S_3	ค่าคงที่ขวามือ
Z	-4	-1	0	0	0
X_1	1	0	1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	1	1	1

ตัวแปรมูลฐาน	X_1	X_2	S_2	S_3	ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน (Ratio)
Z	0	0	1/5	0	18/5	
X_1	1	0	1/5	0	3/5	3
X_2	0	1	-3/5	0	6/5	None
S_3	0	0	1	1	1	1
Z	0	0	0	-1/5	17/5	
X_1	1	0	0	-1/5	2/5	
X_2	0	1	0	3/5	9/5	
S_2	0	0	1	1	1	

ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด $X_1 = 2/5$, $X_2 = 9/5$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ และ $Z = 17/5$

บทที่ 3: การหาผลลัพธ์การโปรแกรมเชิงเส้นโดยโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO และ LINGO (LINDO and LINGO)

Author by: Dr. Roongrat Pisuchpen
Kasetsart University

การหาผลลัพธ์การโปรแกรมเชิงเส้นโดยโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO

โปรแกรม LINDO เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถใช้หาผลลัพธ์ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น การโปรแกรมจำนวนเต็ม และการโปรแกรมควอดราติก

<u>ตัวอย่างคำสั่งของโปรแกรม LINDO</u>

```
MAX  4X1 + 3X2 + 4X3
ST
2X1 + 3X2 + 3X3  <= 60000
2X1 +  X2 +  X3  <= 40000
       X2        <= 15000
END
```

ผลลัพธ์จากโปรแกรม LINDO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 100000.0

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	15000.000000	0.000000
X2	0.000000	1.000000
X3	10000.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	1.000000
4)	15000.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	4.000000	1.333333
X2	3.000000	1.000000	INFINITY
X3	4.000000	2.000000	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	60000.000000	60000.000000	20000.000000
3	40000.000000	20000.000000	20000.000000
4	15000.000000	INFINITY	15000.000000

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\le 150\\
4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 160\\
x_1 &\le 40y_1\\
x_2 &\le 53y_2\\
x_3 &\le 25y_3\\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0;\ x_1, x_2, x_3 \text{ integer}\\
y_1, y_2, y_3 &= 0 \text{ or } 1
\end{aligned}$$

```
MAX    6 X1 + 4 X2 + 7 X3 - 200 Y1 - 150 Y2 - 100 Y3
 SUBJECT TO
      2)  3 X1 + 2 X2 + 6 X3 <=   150
      3)  4 X1 + 3 X2 + 4 X3 <=   160
      4)  X1 - 40 Y1 <=   0
      5)  X2 - 53 Y2 <=   0
      6)  X3 - 25 Y3 <=   0
 END
 GIN      X1
 GIN      X2
 GIN      X3
 INTE      Y1
 INTE      Y2
 INTE      Y3
```